

**KEPELBAGAIAN SIFAT BAGI SUBKELAS BAHARU
FUNGSI POLILOGARITMA DAN PENGOPERASI
BAHARU**

MOHD NAZRAN BIN MOHAMMED PAUZI

UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA

KEPELBAGAIAN SIFAT BAGI SUBKELAS BAHARU FUNGSI
POLILOGARITMA DAN PENGOPERASI BAHARU

MOHD NAZRAN BIN MOHAMMED PAUZI

TESIS YANG DIKEMUKAKAN UNTUK MEMPEROLEH IJAZAH
DOKTOR FALSAFAH

FAKULTI SAINS & TEKNOLOGI
UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA
BANGI

2025

PENAKUAN

Saya akui karya ini adalah hasil kerja saya sendiri kecuali nukilan dan ringkasan yang tiap-tiap satunya telah saya jelaskan sumbernya.

26 February 2025

MOHD NAZRAN BIN MOHAMMED PAUZI
P83692

PERAKUAN TESIS SARJANA DOKTOR (AL-SAFAH)
(DECLARATION OF MASTER / DOCTOR OF PHILOSOPHY THESIS)

A. MAKLUMAT PELAJAR (STUDENT NAME)

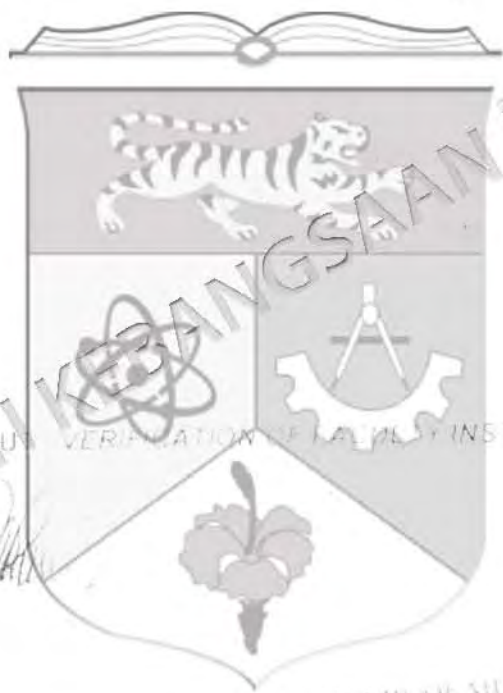
B. PERAKUAN (DECLARATION)



UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA

RAHSIA
CONFIDENTIAL
TERHAD
RESTRICTED

✓ AKSES TERBUKA/
TIDAK TERHAD
OPEN ACCESS
NON-RESTRICTED



UNIVERSITI KEBANGSAAN MALAYSIA

C PENGESAHAN FAKULTI INSTITUTE VERIFICATION OF FACULTY INSTITUTE

PROF. MADYA DR. ARDEI M. NUR M. MURSHI

11/1/2025

PENGHARGAAN

DENGAN NAMA ALLAH YANG MAHA PEMURAH LAGI MAHA PENYAYANG

Alhamdulillah. Segala puji kepada Allah S.W.T yang telah memberikan saya kekuatan dan kesihatan sehingga dapat tesis inisaya siapkan sebagai sebahagian syarat memperoleh ijazah Doktor Falsafah.

Setinggi-tinggi penghargaan dan ucapan terima kasih ditujukan buat Prof. Dr. Maslina Darus selaku penyelia saya yang telah banyak membantu dan membimbing saya dari awal hingga ke akhir penulisan tesis ini. Tidak lupa kepada pemeriksa luar tesis Prof. Dr. Daud Mohamad dan pemeriksa dalam tesis Prof. Dr. Abdul Ghafur yang banyak membantu memperbaiki tesis ini dengan lebih baik lagi.

Jutaan terima kasih kepada pensyarah-pensyarah Pusat Pengajian Sains Matematik UKM yang telah mengajar saya sama ada secara langsung atau tidak langsung. Begitu juga kepada pihak Universiti Selangor yang telah membeti peluang kepada saya untuk melanjutkan pelajaran ke peringkat Ijazah Doktor Falsafah.

Akhir sekali, teristimewa buat isteri tercinta, ayahanda, ibunda, anak-anak tersayang dan seluruh keluarga yang sentiasa memberi dorongan dan sokongan kepada saya untuk terus mencari ilmu serta sentiasa mendoakan kejayaan saya. Allah SWT sahaja yang dapat menbalas jasa kalian.

Wassalam.

ABSTRAK

Tesis ini secara umumnya membicarakan kepelbagaian sifat bagi subkelas baharu bagi fungsi analisis univalen dan p -valen dalam cakera unit. Pada permulaannya, beberapa definisi dan keputusan awal diserlahkan. Diperkenalkan pengoperasi baharu sekutuan antara pengoperasi Srivastava-Choi dan fungsi polilogaritma teritlak dan dikaji sifat-sifat bagi subkelas ini. Diikuti dengan memperkenalkan subkelas baharu yang ditakrifkan oleh fungsi polilogaritma teritlak dan fungsi ubah suai Mittag-Leffler dengan fungsi polilogaritma teritlak. Di sini, batas atas terbaik bagi penentu Hankel kedua dan penentu Hankel ketiga untuk subkelas baharu diperolehi. Kemudian, hubungan yang relevan dengan keputusan yang diperolehi daripada kajian terdahulu juga ditunjukkan. Selepas itu, kajian beralih ke subordinasi dan juga permasalahan ketaksamaan Fekete-Szegö bagi fungsi polilogaritma teritlak yang ditakrifkan menggunakan kalkulus kuantum. Seterusnya, subkelas baharu yang melibatkan fungsi Faber polinomial dengan Fox-Wright yang bi-univalen dikaji. Oleh yang demikian, diperolehi anggaran untuk batas pekali bagi fungsi dalam kelas ini dengan mempertimbangkan subkelas umum fungsi analisis yang bi-univalen. Subkelas baharu bagi p -valen fungsi ganjil ditakrifkan menggunakan operator pembeza Salagean dengan pekali negatif diperkenalkan. Beberapa sifat-sifat seperti ketaksamaan pekali, teorem herotan dan tudung serta kombinasi linear cembung dibincangkan. Tambahan lagi, hasil tambah separa bagi kelas baharu fungsi ganjil ditakrifkan menggunakan operator pembeza Salagean dengan pekali negatif yang univalent dikaji. Sementara itu, batas atas terbaik nisbah bagi fungsi turut diperolehi. Seterusnya, pengoperasian kamiran teritlak bagi fungsi p -valen dalam pengertian fungsi bak-bintang Janowski diperkenalkan. Syarat cukup bagi pengoperasian ini untuk menjadi bak-bintang, hampir cembung dan hampir cembung seragam diperolehi. Anggaran pekali bagi subkelas juga ditentukan. Selepas itu, subkelas baharu bagi fungsi analisis dengan jenis Koebe dikaji. Dengan menggunakan lema Jack dan beberapa pembeza dan ketaksamaan, syarat cukup bagi kebakhintangan untuk fungsi analisis jenis Koebe simetri lipat- m diperolehi. Keputusan bagi subordinasi dan superordinasi bagi subkelas ini juga diperolehi. Akhir sekali, syarat cukup bagi kebakhintangan dan kecembungan untuk ungkapan pada fungsi analisis peringkat kompleks diperolehi.

VARIOUS PROPERTIES FOR NEW SUBCLASSES OF POLILOGARITM FUNCTIONS AND NEW OPERATOR

ABSTRACT

The thesis emphasizes several properties for new subclasses of analytic functions which are univalent and p -valent in a unit disc. The initial focus is on a few definitions and preliminary results. New operator associate between Srivastava-Choi and generalized polilogarithm function have been introduced and the properties of this subclass have been studied. Then, new subclasses defined by generalized polylogarithm functions and modified Mittag-Leffler with generalized polylogarithm functions are introduced. As a result, a sharp upper bound is achieved for both the second and third Hankel determinants for the new subclasses. Next, relevant connections of the results are indicated. Then, the discussion move to subordination and Fekete-Szegö inequality problem of the generalized polilogarithm in term of quantum calculus. Faber polynomials with Fox Wright functions are used in the study of the new bi-univalent subclasses. The estimates for the coefficient bound of the functions in this class are determined by considering a general subclass of analytic bi-univalent functions. Next, a new subclass of p -valent odd functions with negative coefficients is introduced. This subclass is defined by a Salagean differential operator. Moreover, a few properties are considered, such as distortion and covering theorems, coefficient inequalities, and linear convex combinations. The Salagean differential operator analyzes the partial sum of a new subclass of analytic and univalent odd functions. The sharp upper bound on the ratio for the function is obtained from the analysis. Next, the generalized integral operator of p -valent functions in the sense of Janowski's starlike function being introduced. The sufficient conditions for these operators to be starlike, close-to-convex and uniformly close-to-convex are obtained. Furthermore, coefficient bounds for the subclass were established. Besides, a new subclass of analytical functions of the Koebe type is being studied. The sufficient condition for the starlikeness of the n -fold symmetric analytic functions of the Koebe type is constructed using Jack's lemma, as well as a number of differentials and other inequalities. The outcomes of subordination and superordination were also obtained. Finally, it is found that starlikeness and convexity are the necessary conditions for the representation of analytical functions of complex order.

KANDUNGAN

		Halaman
PENGAKUAN		
PENGHARGAAN		iii
ABSTRAK		iv
ABSTRACT		v
KANDUNGAN		vi
SENARAI ILUSTRASI		xi
SENARAI JADUAL		xii
SENARAI SIMBOL		xiii
BAB I	Pengenalan	
1.1	Pendahuluan	1
1.2	Fungsi Analisis dan Fungsi Univalen	3
1.3	Subkelas Fungsi Univalen	9
	1.3.1 Subkelas fungsi univalen peringkat α	12
	1.3.2 Subkelas fungsi univalen peringkat kompleks	12
1.4	Fungsi Analisis Univalen Berpekali Negatif	13
1.5	Hasil Darab Hadamard (Konvolusi)	14
1.6	Fungsi p -valen	14
1.7	Fungsi p -valen berpekali negatif	15
1.8	Penentu Hankel	16
1.9	Fungsi Polilogaritma	18
1.10	Fungsi Hipergeometri	20
1.11	Pengoperasian	21
1.12	Subordinasi dan Superordinasi Pembeza	24
1.13	Objektif Kajian	27
1.14	Organisasi Penulisan	28

BAB II	SUBKELAS BAHARU MENGGUNAKAN PENGOPERASIAN FUNGSI SRIVASTAVA-CHOI DAN POLILOGARITMA TERITLAK	
2.1	Pengenalan dan Takrifan	30
2.2	Pengoperasian Baharu Pembeza-Kamiran	31
2.3	Sifat bagi Subkelas dengan Pekali Negatif	35
	2.3.1 Ketaksamaan pekali	35
	2.3.2 Titik ekstrim	38
	2.3.3 Teorem pertumbuhan dan erotan	40
	2.3.4 Jejari bagi kebakbintangan dan kecembungan	42
	2.3.5 Ketaksamaan kamiran min	45
	2.3.6 Hasil darab Hadamard terubahsuai	47
	2.3.7 Hasil tambah separa	52
BAB III	PENENTU HANKEL BAGI KELAS FUNGSI YANG DITAKRIFKAN OLEH FUNGSI POLILOGARITMA TERITLAK	
3.1	Pendahuluan	58
3.2	Hasil Kajian Terdahulu	61
3.3	Penentu Hankel Kedua bagi Kelas Fungsi Polilogarithma Teritlak	62
3.4	Penentu Hankel Ketiga bagi Kelas Fungsi Polilogarithma Teritlak	69
3.5	Pengoperasian Terbitan Mittag-Leffler Dalam Sebutan Fox- Wright dan Polilogarithma Teritlak	72
3.6	Penentu Hankel Kedua bagi Kelas Fungsi Mittag-Leffler Dalam Sebutan Fox-Wright dan Polilogarithma Teritlak	74
BAB IV	PENGOPERASIAN PEMBEZA POLILOGARITMA TERITLAK MENGGUNAKAN KONSEP KALKULUS KUANTUM	
4.1	Pengenalan	79
4.2	Pengoperasian Pembeza Baharu Menggunakan Kalkulus Kuantum	80
4.3	Hasil Terdahulu Melibatkan Subordinasi	83
4.4	Keputusan Utama Subordinasi Pengoperasian Pembeza Analog- q Polilogarithma Teritlak	84

BAB V	PERMASALAHAN FEKETE-SZEGÖ SUBKELAS PENGOPERASIAN PEMBEZA POLILOGARITMA-Q TERITLAK	
5.1	Pengenalan	92
5.2	Analog- q Fungsi Polilogaritma Teritlak Peringkat ke- m	92
5.3	Fekete-Szego bagi Pengoperasian Polilogaritma- q	94
	5.3.1 Hasil terdahulu permasalahan Fekete-Szegö	95
	5.3.2 Hasil utama Fekete-Szegö polilogaritma- q teritlak	96
BAB VI	ANGGARAN PEKALI SUBKELAS FUNGSI YANG ANALISIS DAN BI-UNIVALEN	
6.1	Pendahuluan	109
6.2	Fungsi Bi-univalen	110
6.3	Anggaran Pekali Fungsi Subkelas Analisis dan Bi-Univalen Melibatkan Fungsi Fox-Wright Teritlak dan Polinomial Faber	110
	6.3.1 Subkelas fungsi polilogaritma dan Fox-Wright teritlak	111
	6.3.2 Hasil utama anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-Univalen melibatkan polilogaritma dan Fox-Wright teritlak dengan polinomial Faber	113
6.4	Anggaran Pekali Fungsi Subkelas Analisis dan Bi-Univalen Melibatkan Fungsi Fox-Wright Teritlak dan Kuroki-Owa	118
	6.4.1 Keputusan terdahulu anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-Univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki Owa	119
	6.4.2 Keputusan utama anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-Univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki Owa	120
BAB VII	SUBKELAS FUNGSI GANJIL UNIVALEN DITAKRIFKAN MENGGUNAKAN PENGOPERASI SALAGEAN DENGAN PEKALI NEGATIF	
7.1	Pengenalan Fungsi Ganjil Univalen	125
7.2	Fungsi Ganjil Univalen Ditakrifkan Menggunakan Operasi terbitan Salagean	126
7.3	Pekali Ketaksamaan bagi Kelas Fungsi Ganjil Univalen Salagean	128

7.4	Teorem Pertumbuhan dan Erotan bagi Kelas Fungsi Ganjil Salagean Univalen dengan Pekali Negatif	131
7.5	Kombinasi Linear Cembung bagi Kelas Fungsi Ganjil Salagean Univalen dengan Pekali Negatif	135
7.6	Hasil Tambah Separa Fungsi Analitik Ganjil Ditakrifkan Menggunakan Operator Pembeza Salagean	136

BAB VIII SUBKELAS FUNGSI GANJIL P -VALEN DITAKRIFKAN MENGGUNAKAN PENGOPERASI SALAGEAN

8.1	Pengenalan	146
8.2	Pekali Ketaksamaan bagi Kelas Fungsi Ganjil p -valen Salagean	148
8.3	Teorem Pertumbuhan dan Herotan bagi Kelas Fungsi Ganjil Salagean p -valen dengan Pekali Negatif	152
8.4	Kombinasi Linear Cembung bagi Kelas Fungsi Ganjil Salagean p -valen dengan Pekali Negatif	156

BAB IX PENGOPERASI KAMIRAN TERITLAK BAGI FUNGSI P -VALEN DALAM PENGERTIAN FUNGSI BAK-BINTANG JANOWSKI

9.1	Pendahuluan	158
9.2	Kelas Fungsi Caratheodory dan Kelas Fungsi Janowski	159
9.3	Pengoperasi Kamiran Teritlak	160
9.4	Hasil Kajian Terdahulu	161
9.5	Hasil Utama	161

BAB X KELAS FUNGSI BAK BINTANG TERITLAK JENIS KOEBE PERINGKAT KOMPLEKS

10.1	Pendahuluan	169
10.2	Kelas Fungsi Bab Bintang Teritlak Jenis Koebe Peringkat Kompleks	170
10.3	Hasil Kajian Terdahulu	171
10.4	Hasil Subordinasi dan Superordinasi	173

10.5	Sifat-sifat bagi Kelas $M_b(\alpha, \lambda, \beta, \eta)$	177
10.6	Aplikasi Ketaksamaan Pembezaan	182

BAB XI KESIMPULAN DAN KAJIAN LANJUTAN

11.1	Kesimpulan	186
11.2	Kajian Lanjutan	187

RUJUKAN	188
----------------	------------

LAMPIRAN



SENARAI ILUSTRASI

No. Rajah		Halaman
Rajah 1.1	Mandala: (a) Mandala berkait ringkas, (b) Mandala tidak berkait ringkas, (c) Mandala tertutup	3
Rajah 1.2	Fungsi Analisis	4
Rajah 1.3	Pemetaan fungsi Koebe \mathbb{U} keseluruhan $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$	6
Rajah 1.4	Fungsi f memetakan \mathbb{U} ke seluruh rantau cembung	10
Rajah 1.5	Fungsi f memetakan \mathbb{U} ke seluruh rantau bak-bintang	10
Rajah 1.6	Fungsi f memetakan \mathbb{U} ke seluruh rantau hampir cembung	11
Rajah 1.7	Fungsi dilogaritma dan trilogaritma dalam satah kompleks.	19
Rajah 1.8	Fungsi polilogaritma yang berbeza dalam satah kompleks.	19

SENARAI JADUAL

No. Jadual		Halaman
Jadual 1.1	Kronologi permasalahan pekali	8
Jadual 1.2	Kronologi perkembangan pengoperasian	25



SENARAI SIMBOL

A	kelas fungsi analisis
D	mandala
D_q	terbitan- q kalkulus kuantum
$C(\alpha)$	kelas fungsi hampir cembung peringkat α
\mathbb{C}	set nombor kompleks
C	kelas fungsi cembung
$C(p, \alpha)$	kelas fungsi cembung p -valen berperingkat α
f_b	fungsi simetri lipatan ke- n jenis Koebe
K	fungsi hampir cembung
$K(\alpha)$	fungsi hampir cembung univalen peringkat α
\mathbb{N}_0	nombor bulat positif termasuk sifar
S	kelas fungsi Univalen
S^*	kelas fungsi bak bintang
$S(p)$	kelas fungsi p -valen bak bintang
$S^*(p, \alpha)$	kelas fungsi p -valen bak bintang berperingkat α
\mathbb{U}	cakera unit, $ z < 1$
\mathbb{U}^*	semua nombor kompleks kecuali sifar, $\mathbb{C} \setminus 0$
T	kelas fungsi analisis dengan pekali negatif
$T(p)$	kelas fungsi p -valen yang analisis dengan pekali negatif
\mathbb{Z}_0^-	Integer negatif termasuk sifar

BAB I

PENGENALAN

1.1 PENDAHULUAN

Analisis kompleks merupakan satu cabang matematik yang mengkaji fungsi-fungsi berpemboleh ubah kompleks. Ianya amat berguna dalam cabang matematik seperti geometri aljabar, teori nombor, kombinatorik dan matematik gunaan. Tambahan pula, dalam bidang fizik dan kejuruteraan, penggunaan analisis kompleks juga termasuk dalam cabang hidrodinamik, termodinamik, quantum mekanik, nuklear, aeroangkasa, kejuruteraan mekanikal dan kejuruteraan elektrik. Dalam analisis kompleks, teori pemetaan mensebentuk mempunyai banyak aplikasi fizikal dan analisis teori nombor. Sifat-sifat geometri bagi fungsi analisis dikaji dalam teori fungsi geometri dan teorem pemetaan Riemann adalah asas utama bagi teori ini. Teori Fungsi Geometri (TFG) adalah cabang dalam analisis kompleks melibatkan sifat-sifat geometri dalam fungsi analisis. Dalam kata lain, TFG adalah bidang melihat ciri-ciri matematik menggunakan konsep dan analisis geometri. Kajian berkaitan TFG telah bermula sejak kurun ke-19 lagi.

Titik permulaan perkembangan kajian berkenaan teori fungsi univalen telah dimulakan oleh Koebe pada tahun 1907. Seterusnya, kajian TFG ini dilakukan oleh ramai pengkaji setelah suatu terkaan diperkenalkan oleh Bieberbach pada 1916. Setelah 70 tahun, terkaan ini telah dibuktikan oleh Louise de Branges pada tahun 1985. Namun, banyak permasalahan baharu yang masih memerlukan penyelesaiannya. Dalam pada itu, beberapa kelas fungsi analisis baharu yang univalen telah diperkenalkan dan dikaji seperti kelas fungsi cembung dan bak bintang pada kurun ke-20. Goodman (1983) telah mengkaji ciri-ciri geometri bagi kelas fungsi jenis ini.

Pada tahun 1952, Kaplan telah memperkenalkan dan mengkaji sifat-sifat bagi kelas fungsi univalen hampir-cembung.

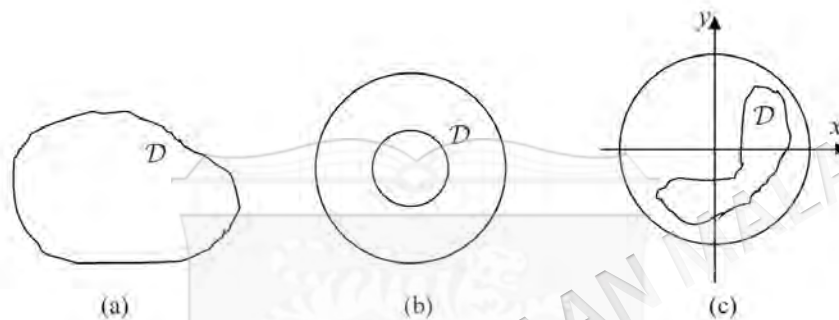
Kajian berkenaan pengoperasian memainkan peranan penting dalam TFG. Dua subkelas bagi kelas fungsi yang univalen, iaitu kelas fungsi bak-bintang dan kelas fungsi cembung berkait antara satu sama lain. Ciri ini telah dikaji oleh Alexander pada tahun 1915. Seterusnya, Libera (1965) memperkenalkan pengoperasian kamiran dan menunjukkan dua kelas ini tertutup menggunakan pengoperasian ini. Bernardi (1969) memperkenalkan pengoperasian teritlak dan telah mengkaji sifat-sifatnya. Manakala, Ruscheweyh (1975) dan ramai lagi penyelidik telah mentakrifkan pengoperasian teritlak baharu dan memperkenalkan kelas fungsi analisis baharu. Kelas fungsi ini mengitlak beberapa hasil kajian fungsi analisis terdahulu.

Dalam kajian ini, diperkenalkan dan dikaji beberapa subkelas fungsi analisis yang baharu. Subkelas baharu ini diperoleh menggunakan pengoperasian kamiran teritlak baharu dan juga pengoperasian terbitan teritlak yang baharu. Hasil daripada pengoperasian baharu yang diperoleh mengitlakkan hasil kajian oleh ramai pengkaji sebelumnya seperti Libera (1965), Bernardi (1969), Jung, Kim dan Srivastava (1993), Attiya dan Aouf (2007) dan ramai lagi. Turut dikaji sifat-sifat bagi subkelas baharu ini.

Bab ini mengandungi takrifan dan hasil terdahulu teori fungsi geometri, yang akan digunakan dalam bab-bab selanjutnya. Pembuktian daripada hasil terdahulu diterima. Perbincangan lebih mendalam berkenaan hasil terdahulu ini boleh didapati daripada teks karya Duren (1983) dan Goodman (1983). Dinyatakan hasil klasik seperti teorem Riemann, teorem pertumbuhan dan herotan bagi subkelas fungsi univalen dalam cakera unit. Terkaan Bieberbach turut dinyatakan. Kajian juga menumpukan pada subkelas fungsi univalen berbentuk cembung, bak-bintang, hampir cembung dan beberapa kelas fungsi lagi.

1.2 FUNGSI ANALISIS DAN FUNGSI UNIVALEN

Set titik-titik dalam satah dikatakan berkait jika mana-mana dua titik dalam set itu boleh disambungkan dengan lengkung licin cebis-demi-cebis selanjar yang kesemua titiknya berada dalam set. Set terbuka berkait dalam satah kompleks dipanggil mandala. Mandala D hanya berkait jika mana-mana lengkung tertutup ringkas dalam D (dengan kata lain, D tidak mempunyai lubang (lihat Rajah 1.1).



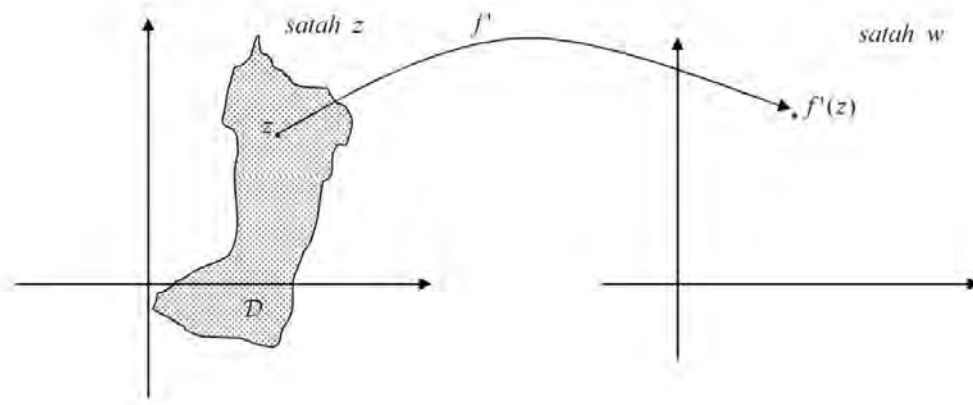
Rajah 1.1 Mandala: (a) Mandala berkait ringkas, (b) Mandala tidak berkait ringkas, (c) Mandala tertutup

Rantau D berkait ringkas jika pelengkapnya terkait antara ε ke ∞ . Iaitu, jika sebarang $z_0 \in D^c$ (pelengkap D) dan $\varepsilon > 0$, terdapat lengkung selanjar $\gamma(t)$, $0 \leq t < \infty$, sehingga:

- i) $d(\gamma(t), D^c) \geq \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$,
- ii) $\gamma(0) = z_0$
- iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$

Takrif 1.2.1. (Duren 1983) Fungsi $f : D \rightarrow C$ dikatakan analisis dalam D jika mempunyai terbitan pada setiap titik D (lihat Rajah 1.2).

Justeru, jika suatu fungsi nilai kompleks f terbezakan pada setiap titik pada kejiranan z_0 , maka f dikatakan analisis pada z_0 .



Rajah 1.2 Fungsi Analisis

Fungsi f dikatakan analisis dalam mandala D terkait ringkas jika terbezakan pada setiap titik dalam D . Iaitu, f terbezakan di semua peringkat pada z_0 dan f mempunyai kembangan siri Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (1.1)$$

yang menumpu dalam cakera terbuka berpusat di z_0 .

Fungsi berpemboleh ubah kompleks f dikatakan univalen (atau mudah) dalam suatu mandala $D \subset \mathbb{C}$ jika ia tidak mengambil lebih daripada satu nilai, iaitu jika $f(z_1) = f(z_2)$ untuk semua z_1 dan z_2 dalam D , maka $z_1 = z_2$. Goodman (1983) telah memberikan takrifan bagi fungsi univalen seperti berikut:

Takrif 1.2.2. (Goodman 1983) Fungsi analisis dikatakan univalen (atau mudah) dalam mandala $D \subset \mathbb{C}$, jika $f(z_1) = f(z_2)$ untuk semua z_1 dan z_2 dalam D , maka $z_1 = z_2$.

Suatu fungsi dikatakan univalen setempat pada titik $z_0 \in D$ jika ia univalen dalam beberapa kejiranan z_0 . Untuk fungsi analisis f , syarat $f'(z) \neq 0$ adalah bersamaan dengan univalen setempat pada z_0 . Namun begitu, terdapat juga fungsi univalen yang tidak analisis dalam suatu mandala D .

Contohnya, fungsi $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \neq 1$ adalah univalen dalam D , tetapi mempunyai kutub ringkas pada $z = 1$ jika ia adalah salah satu titik z yang terletak di dalam D . Satu

contoh lagi melibatkan fungsi $f(z) = e^z$ analisis pada sebarang mandala D tetapi tidak univalen dalam D kerana $e^z = e^{2n\pi i + z}$ untuk semua nilai $z \in D$ dan n adalah integer.

Satu teorem penting yang telah memberi impak hebat dalam kajian teori fungsi univalen ialah teorem pemetaan Riemann yang dinyatakan seperti berikut:

Teorem 1.2.3. (Teorem pemetaan Riemann) Jika D adalah mandala berkait ringkas dan z_0 titik yang diberi di dalam D , maka wujud suatu fungsi analisis univalen f yang memetakan D secara mensebentuk ke atas cakera unit $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ dengan sifat $f(z_0) = 0$ dan $f'(z_0) > 0$.

Oleh itu, dari sudut pandang teorem pemetaan Riemann, selain daripada mengkaji sifat-sifat fungsi univalen yang analisis dalam sebarang mandala terkait ringkas, kajian akan dihadkan bagi kasus yang D dalam cakera unit terbuka \mathbb{U} .

Seterusnya, set semua fungsi analisis dalam \mathbb{U} dilambangkan sebagai $H(\mathbb{U})$. Ambil $H[a, n]$ subkelas bagi $H(\mathbb{U})$ melibatkan fungsi dalam bentuk $f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$, dan misalkan $H_0 \equiv H[0, 1]$ dan $H \equiv H[1, 1]$. Manakala, kelas fungsi yang analisis dalam $H(\mathbb{U})$ yang ternormalkan dengan syarat $f(0) = 0, f'(0) = 1$ dilambangkan dengan A . Dengan penormalan ini, memberikan bahawa setiap $f \in A$ mempunyai perwakilan kembangan siri Taylor

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.2)$$

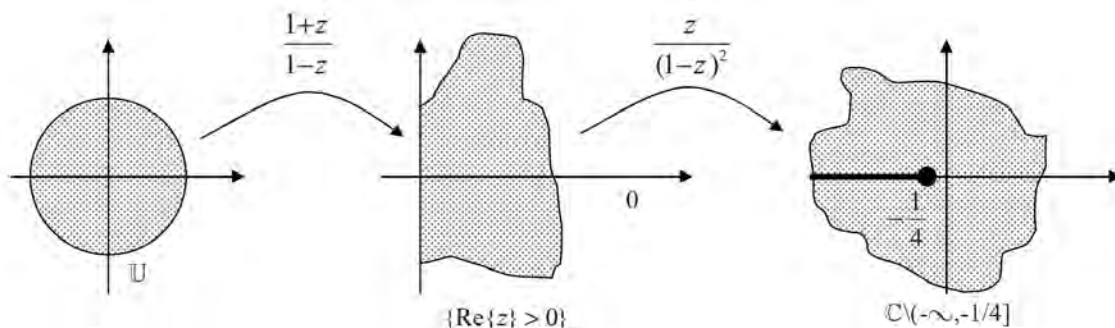
pada cakera unit \mathbb{U} , dengan a_n adalah pekali bagi (1.2).

Seterusnya, dilambangkan $S \subset A$ bagi kesemua fungsi analisis univalen dan ternormalkan dalam \mathbb{U} . Contoh yang penting bagi fungsi f dalam S ialah fungsi Koebe

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots + nz^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n, \quad (1.3)$$

yang memetakan \mathbb{U} secara menyeluruh dalam $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$, ialah fungsi terbesar dalam S . Contoh-contoh lain fungsi yang berada dalam S termasuklah pemetaan identiti $f(z) = z$, $f(z) = \frac{z}{1-z}$ yang memetakan \mathbb{U} keseluruhan separuh satah

$\operatorname{Re}\{z\} > -1/2$. Fungsi $e^{i\theta}K(e^{i\theta}z, (\theta \in \mathbb{R}))$, juga berada dalam S dan dirujuk sebagai putaran bagi fungsi Koebe. Fungsi ini memainkan peranan penting dalam kajian kelas S dan satu-satunya fungsi ekstrim bagi pelbagai permasalahan ekstrim dalam S .



Rajah 1.3 Pemetaan fungsi Koebe \mathbb{U} keseluruhan $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$

Satu lagi fungsi yang berkaitan dan tidak kurang pentingnya adalah fungsi kelas yang dilambangi Σ , yang juga univalen tetapi dalam $\bar{\mathbb{U}} = \{z : |z| > 1\}$. Di sini $F \in \Sigma$ mempunyai kembangan siri

$$F(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots = z + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}, \quad z \in \bar{\mathbb{U}} : \{z : |z| > 1\}. \quad (1.4)$$

Secara khusus $f \in S$ mengimplikasikan $\frac{1}{f(1/z)} \in \Sigma$, dan setiap fungsi dalam kelas Σ diperoleh dalam bentuk sedemikian.

Teori fungsi geometri dikembangkan oleh Koebe pada tahun 1907 hasil daripada pembuktian bahawa S adalah famili normal yang memberi implikasi bahawa $|a_2| \leq c$ untuk beberapa nilai c . Hasil beliau telah menarik minat ramai ahli matematik pada masa itu seperti Gronwall (1914), Bieberbach (1916) dan Pick (1916) untuk meneroka bidang fungsi univalen.

Hasil menarik diperoleh oleh Gronwall (1914) adalah pembuktian Teorem Luas. Konsep teorem ini amat penting dalam menyelesaikan masalah rumit melibatkan pekali sesuatu fungsi.

Teorem 1.2.4. (Teorem Luas) Jika $F \in \Sigma$ diberikan oleh $F = z + \sum \alpha_n z^{-n}$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1. \quad (1.5)$$

Konsep teorem ini penting dalam menyelesaikan masalah rumit yang melibatkan pekali suatu fungsi. Berdasarkan Teorem 1.2.4, diperoleh korolari berikut:

Korolari 1.2.5. $|\alpha| \leq 1$ dan kesamaan tercapai jika dan hanya jika pelengkap $F(\mathbb{U}')$; $\mathbb{U}' = \{z : |z| > 1\}$ adalah garis tembereng yang mempunyai panjang 4 unit.

Koebe (1907) telah membuat terkaan bahawa $|a_n| < n$ dan ianya benar untuk fungsi kesamaan (1.3). Beberapa ahli penyelidik begitu berminat dengan teori ini seperti Bieberbach (1916) dan Löwner (1923). Khususnya Bieberbach (1916) yang telah membuktikan terkaan Koebe bagi $c = 2$ bahawa $|a_2| \leq c$ untuk beberapa nilai mutlak c . Kesamaan diberi oleh fungsi yang memeta \mathbb{U} ke atas satah kompleks \mathbb{C} disepanjang alur $(-\infty, -1/4)$ (Rajah 1.3).

Terkaan Bieberbach telah menjadi cabaran sebenar dan banyak teknik yang menarik dalam analisis kompleks dibangunkan untuk mendapatkan pelbagai keputusan separa bagi terkaan Bieberbach ini.

Terkaan Bierberbach:(Bieberbach 1916) Pekali bagi setiap fungsi $f \in S$ yang diberikan oleh (1.2) memenuhi sifat $|a_n| \leq n$ untuk $n = 2, 3, 4, \dots$ dan $|a_n| = n$ jika dan hanya jika f merupakan fungsi Koebe.

Bieberbach adalah yang pertama mendapatkan hasil nilai pekali a_n bagi $f \in S$ dengan membuktikan bahawa $|a_2| \leq 2$ pada tahun 1916.

Teorem 1.2.6. (Teorem Bieberbach) Andaikan fungsi $f \in S$, maka $|a_2| \leq 2$ dengan kesamaan jika dan hanya jika f adalah fungsi Koebe (1.3).

Pelbagai kaedah telah digunakan dalam menangani masalah bagi menganggarkan nilai pekali (1.2). Pada tahun 1923 Karl Löwner telah memperkenalkan persamaan terbitan Löwner dan membuktikan bahawa $|a_3| \leq 3$

apabila $n = 3$. Seterusnya, Garabedian dan Schiffer (1955) berjaya mendapatkan nilai $|a_4| \leq 4$. Seterusnya, Pederson dan Schiffer (1968) dan Ozawa (1969) berjaya memperoleh nilai $|a_6| \leq 6$ apabila $n = 6$. Setelah itu, Pederson dan Schiffer (1972) membuktikan pula bahawa $|a_5| \leq 5$ dengan menggunakan ketaksamaan Garabedian dan Schiffer (1955). Akhirnya, pada tahun 1985 de Branges telah berjaya membuktikan bahawa bagi setiap $n \geq 2$ diperoleh $|a_n| \leq n$. Jadual 1.1 menunjukkan kronologi permasalahan pekali $|a_n| \leq n$.

Jadual 1.1 Kronologi permasalahan pekali

Hasil pekali	Penulis
$ a_2 \leq 2$	Bieberbach (1916)
$ a_3 \leq 3$	Löwner (1923)
$ a_4 \leq 4$	Garabedian dan Schiffer (1955)
$ a_6 \leq 6$	Pederson (1968), Ozawa (1969)
$ a_5 \leq 5$	Paderson dan Schiffer (1972)
$ a_n \leq n$ untuk semua n	de Brange (1985)

Hasil daripada Bieberbach telah membuatkan teorem berikut lebih bermakna. Teorem yang terlibat ialah Teorem Penutup Koebe, Teorem Erotan dan Teorem Pertumbuhan yang diberikan seperti berikut:

Teorem 1.2.7. (Teorem Penutup Koebe) Jika $f \in S$, maka

$$\left\{ w : |z| < \frac{1}{4} \right\} \subset f(\mathbb{U}).$$

Teorem 1.2.8. (Goodman 1983) (Teorem Erotan) Untuk setiap $f \in S$,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1,$$

bagi setiap $z \in \mathbb{U}$, $z \neq 0$ dan kesamaan terjadi jika dan hanya jika fungsi f adalah fungsi Koebe. Teorem erotan ini berkaitan untuk menentukan batasan fungsi terbitan bagi suatu fungsi univalen $|f'(z)|$.

Teorem 1.2.9. (Goodman 1983)(Teorem Pertumbuhan) Untuk setiap $f \in S$, maka

$$\frac{1-r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1,$$

bagi setiap $z \in \mathbb{U}, z \neq 0$ dan kesamaan terjadi jika dan hanya jika fungsi f adalah fungsi Koebe. Teorem pertumbuhan pula digunakan untuk menentukan batas atas dan batas bawah fungsi f bagi suatu fungsi univalen.

Sungguhpun permasalahan berkaitan terkaan Bieberbach telah lama selesai, namun pencarian permasalahan baharu terus dikaji. Banyak kelas baharu diperkenalkan berdasarkan kepada subkelas asas bagi S . Darus (2012) menyatakan bahawa, hampir kesemua subkelas S ditentukan oleh sifat tetap geometri daripada imej mandala dan boleh disingkatkan secara ringkas maksud sifat tetap geometri sesuatu fungsi dengan pengenalan terhadap subkelas bagi S .

1.3 SUBKELAS FUNGSI UNIVALEN

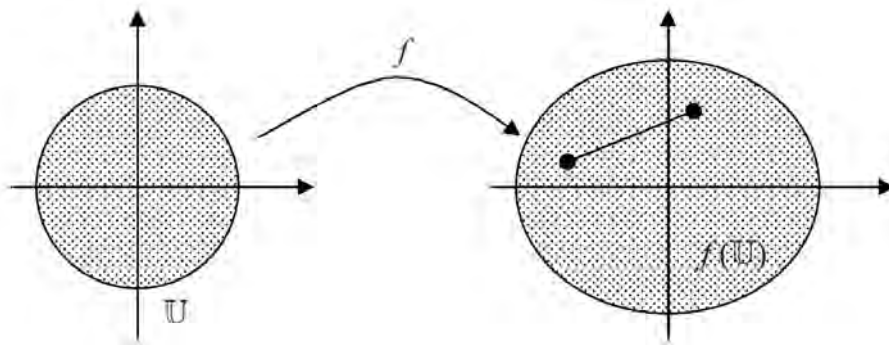
Dalam bahagian ini, beberapa subkelas fungsi univalen S akan dibincangkan. Di antaranya ialah kelas fungsi bak-bintang dan kelas fungsi cembung. Kedua-dua subkelas ini diperkenalkan oleh Alexander (1915).

Takrif 1.3.1. (Duren 1983) Fungsi $f \in S$ dikatakan cembung dalam \mathbb{U} jika imej bagi \mathbb{U} di bawah pemetaan f merupakan mandala cembung $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}_C$, iaitu tembereng garis yang menghubungkan sebarang pasangan titik dalam \mathbb{U}_C , yang keseluruhannya terletak dalam \mathbb{U}_C (Rajah 1.4). Kelas bagi semua fungsi S yang cembung dalam \mathbb{U} dilambangkan dengan C .

Teorem berikut memberikan syarat perlu dan cukup bagi fungsi f cembung.

Teorem 1.3.2. (Duren 1983) Katalah fungsi f analisis dalam \mathbb{U} dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Maka fungsi $f \in C$ jika dan hanya jika

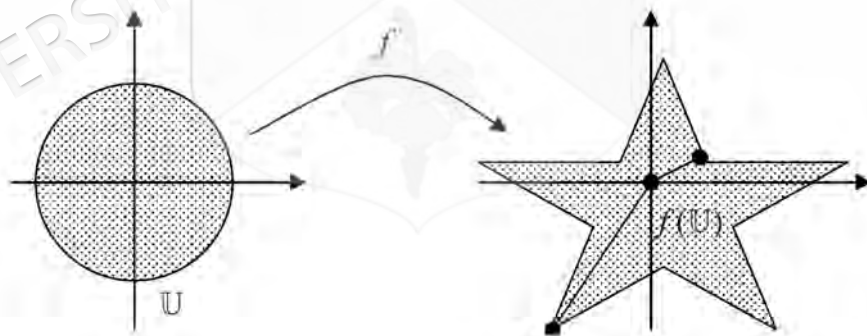
$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (1.6)$$

Rajah 1.4 Fungsi f memetakan \mathbb{U} ke seluruh rantau cembung

Contoh fungsi cembung ialah

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Takrif 1.3.3. (Duren 1983) Fungsi $f \in S$ dikatakan bak-bintang dalam \mathbb{U} jika imej bagi \mathbb{U} di bawah f melibatkan titik w_0 adalah mandala bak-bintang, $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}_s$ yang berpusat di asalan $w_0 = 0$, iaitu tembereng garis yang menghubungkan $w_0 = 0$ kepada setiap titik lain dalam \mathbb{U}_s keseluruhannya berada dalam \mathbb{U}_s (Rajah 1.5). Dilambangkan S^* sebagai kelas semua fungsi bagi S yang bak-bintang dalam \mathbb{U} .

Rajah 1.5 Fungsi f memetakan \mathbb{U} ke seluruh rantau bak-bintang

Teorem berikut memberikan syarat perlu dan cukup bagi fungsi f bak-bintang

Teorem 1.3.4. (Duren 1983) Katalah fungsi f analisis dalam \mathbb{U} dengan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Maka fungsi $f \in S^*$ jika dan hanya jika

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (1.7)$$

Sebagai contoh fungsi Koebe $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ merupakan fungsi bak-bintang.

Hubungan antara fungsi cembung dan fungsi bak-bintang pertama kali diterokai oleh Alexander pada tahun 1915.

Teorem 1.3.5. (Duren 1983) Misalkan f analisis dalam \mathbb{U} dengan $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Maka $f \in C$ jika dan hanya jika $zf'(z) \in S^*, z \in \mathbb{U}$.

Satu lagi subkelas penting bagi S ialah fungsi hampir cembung yang diperkenalkan oleh Kaplan (1952).

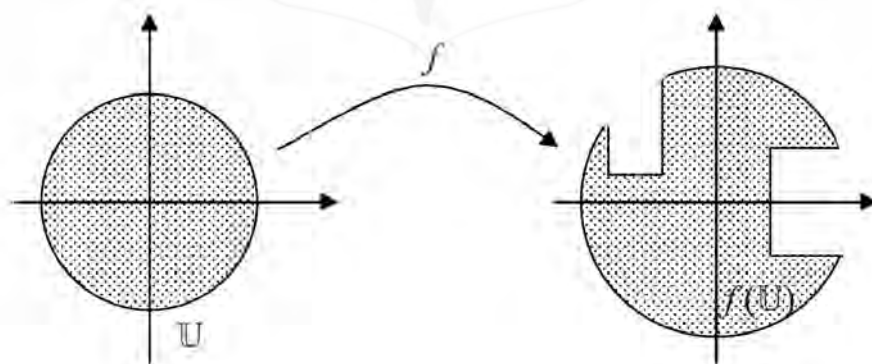
Takrif 1.3.6. (Duren 1983) Andaikan f analisis dalam \mathbb{U} . Maka f dikatakan hampir cembung jika dan hanya jika wujud fungsi cembung g sehingga

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} > 0, (z \in \mathbb{U}), \quad (1.8)$$

atau setara jika $G = zg', G \in S^*$ bila $g \in C$, maka

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{zf'(z)}{G(z)} \right\} > 0, (z \in \mathbb{U}).$$

Kelas ini dilambangkan sebagai K . Jelas sekali $S^* \subset S$. Kaplan (1952) telah menunjukkan bahawa $K \subset S$, dan seterusnya $C \subset S^* \subset K \subset S$.



Rajah 1.6 Fungsi f memetakan \mathbb{U} ke seluruh rantau hampir cembung

1.3.1 Subkelas fungsi univalen peringkat α

Robertson (1936) telah memperkenalkan subkelas bagi fungsi univalen peringkat α , $0 \leq \alpha < 1$ yang ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 1.3.7. (Goodman 1983) Suatu fungsi f dikatakan bak-bintang peringkat α , jika

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{U}).$$

Kelas ini dilambangkan dengan $S^*(\alpha)$. Diketahui bahawa $S^*(\alpha) \subset S^*(0) \equiv S^* \subset S$.

Takrif 1.3.8. (Goodman 1983) Suatu fungsi f dikatakan cembung peringkat α , jika

$$\operatorname{Ny} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1; z \in \mathbb{U}).$$

Kelas ini dilambangkan dengan $C(\alpha)$. Diketahui bahawa $C(\alpha) \subset C(0) \equiv C \subset S$. Kelas ini telah dikaji oleh ramai penyelidik antaranya Schild (1965), Pinchuk (1968) dan juga Chen dan Owa (1991).

1.3.2 Subkelas fungsi univalen peringkat kompleks

Takrif 1.3.9. (Wiatrowski 1970) Andaikan fungsi $f \in A$ diberi oleh (1.2). Maka $f \in C(\gamma)$ dikatakan fungsi cembung peringkat kompleks γ , $\gamma \neq 0$, jika dan hanya jika $f'(z) \neq 0, z \in \mathbb{U}$, dan

$$\operatorname{Ny} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0. \quad (1.9)$$

Beberapa sifat kelas fungsi ini telah dikaji oleh Nasr dan Aouf (1985) dan telah memberikan takrifan berikut:

Takrif 1.3.10. (Nasr dan Aouf 1985) Andaikan fungsi $f \in A$ diberi oleh (1.2). Maka $f \in S^*(\gamma)$ dikatakan fungsi bak-bintang peringkat kompleks γ , $\gamma \neq 0$, jika dan hanya

jika $f(z) \neq 0, z \in \mathbb{U}$, dan

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} > 0. \quad (1.10)$$

Diperhatikan bahawa $f(z) \in C(\gamma)$ dan $zf'(z) \in S^*(\gamma)$.

Akhir sekali, Al-Amiri dan Fernando (1990) memperkenalkan kelas fungsi hampir cembung peringkat kompleks γ , $K(\gamma)$ seperti berikut:

Takrif 1.3.11. (Al-Amiri dan Fernando 1990) Andaikan fungsi $f \in A$. Maka $f \in K(\gamma)$ dikatakan fungsi hampir cembung peringkat kompleks γ , $\gamma \neq 0$, jika dan hanya jika $g(z) \neq 0, z \in \mathbb{U}$, dan

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{zf'(z)}{g(z)} - 1 \right) \right\} > 0. \quad (1.11)$$

1.4 FUNGSI ANALISIS UNIVALEN BERPEKALI NEGATIF

Silverman (1975) telah memperkenalkan fungsi analisis univalen berpekali negatif yang diberikan seperti berikut.

Andaikan T subkelas bagi fungsi yang diberikan oleh (1.2), yang ditakrifkan seperti berikut.

Takrif 1.4.1. (Silverman 1975) Andaikan T subkelas kepada S merupakan fungsi yang terdiri daripada pekali negatif dan boleh ditulis dalam bentuk

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n. \quad (1.12)$$

Maka fungsi $f \in T$ dinamakan fungsi analisis univalen berpekali negatif.

1.5 HASIL DARAB HADAMARD (KONVOLUSI)

Takrif 1.5.1. Andaikan $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ dan $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, dua siri kuasa yang menumpu dalam $|z| < 1$ dalam \mathbb{U} . Hasil darab Hadamard bagi fungsi f dan g ditakrifkan sebagai $h = f * g$ dengan siri kuasa

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n, \quad |z| < 1. \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (1.13)$$

Berikut diberi takrifan hasil darab Hadamard bagi kelas fungsi berpekali negatif. Katalah fungsi f_m yang ditakrifkan sebagai

$$f_m(z) = z^p - \sum_{n=p+k}^{\infty} a_{n,m} z^n, \quad m = (1, 2), \quad (1.14)$$

berada dalam kelas $T(p, n)$, maka konvolusi (atau hasil darab Hadamard) bagi fungsi $f_1(z)$ dan $f_2(z)$, adalah,

$$(f_1 * f_2)(z) := z^p - \sum_{n=p+k}^{\infty} a_{n,1} a_{n,2} z^n. \quad (1.15)$$

1.6 FUNGSI p -VALEN

Secara amnya sebarang fungsi p -valen merupakan kembangan siri Taylor yang berbentuk seperti berikut.

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n, \quad (p, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}). \quad (1.16)$$

Kelas fungsi p -valen dalam cakera unit \mathbb{U} yang berbentuk seperti (1.16) di atas dilambangkan dengan $S(p)$. Berikut akan dibincangkan beberapa subkelas bagi fungsi p -valen:

Andaikan $S^*(p, \alpha)$ dan $C(p, \alpha)$, $0 < \alpha \leq p$, sebagai kelas fungsi bak bintang p -valen berperingkat α dan kelas fungsi cembung p -valen berperingkat α , iaitu

$$S^*(p, \alpha) = f \in S(p) : Ny \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}$$

dan

$$C(p, \alpha) = f \in S(p) : Ny \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U}.$$

1.7 FUNGSI p -VALEN BERPEKALI NEGATIF

Andaikan $T(p)$ subkelas bagi fungsi yang diberi oleh (1.2), yang ditakrifkan seperti berikut.

Takrif 1.7.1. Katalah $T(p)$ subkelas S yang mengandungi fungsi f berbentuk

$$f(z) = z^p - \sum_{n=p+k}^{\infty} a_n z^n; \quad a_n \geq 0, \quad p, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.17)$$

Suatu fungsi $f \in T(p)$ dinamakan fungsi p -valen dengan pekali negatif. Yamakawa (1992) telah membuktikan bahawa

$$f \in ST^*(p, \alpha) \iff \sum_{n=p+k}^{\infty} (n - \alpha) a_n \leq p - \alpha \quad (1.18)$$

dan

$$f \in CT(p, \alpha) \iff \sum_{n=p+k}^{\infty} n(n - \alpha) a_n \leq p(p - \alpha), \quad (1.19)$$

yang $ST^*(p, \alpha)$ dan $CT(p, \alpha)$ masing-masing adalah kelas fungsi bak bintang p -valen berpekali negatif dengan peringkat α dan fungsi cembung p -valen berpekali negatif peringkat α .

1.8 PENENTU HANKEL

Penentu Hankel mempunyai beberapa kepentingan dalam kajian fungsi analisis seperti kriteria keunikan fungsi analisis. Ehrenborg (2000) telah mengkaji penentu Hankel melibatkan fungsi polinomial eksponen. Manakala, Layman (2001) pula membincangkan berkenaan jelmaan Hankel bagi jujukan integer dan sifat-sifatnya.

Dalam bahagian ini, diberikan definisi penting bagi Penentu Hankel $H_{q,n}(f)$ bagi $q \geq 1$ dan $n \geq 1$ bagi pekali Taylor untuk fungsi $f \in A$ berbentuk (1.2) yang ditakrifkan oleh Noonan dan Thomas (1976) seperti berikut:

Takrif 1.8.1. (Noonan dan Thomas 1976) Untuk fungsi f diberikan oleh (1.2) dan $q \in \mathbb{N}$, penentu Hankel peringkat- q diberikan oleh

$$H_{q,n}(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}, \quad (1.20)$$

yang mana $a_1 = 1$ dan $n, q \in \mathbb{N} = 1, 2, \dots$.

Dapat diperhatikan bahawa untuk nilai $q = 2$ dan $n = 1$, akan diperoleh teorem bagi Fekete dan Szegö yang diberi seperti berikut:

$$H_{2,1}(f) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 - a_2^2. \quad (1.21)$$

Penentu Hankel bagi $f \in A$ for $q = 2$ dan $n = 2$, dikenali sebagai penentu Hankel kedua, diberikan seperti berikut:

$$H_{2,2}(f) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2. \quad (1.22)$$

Janteng, Halim dan Darus (2006) telah memperoleh hasil batas tepat (1.22) bagi fungsi f dalam (1.2), yang melibatkan fungsi-fungsi yang terbitannya mempunyai bahagian nyata positif dan memperoleh keputusan $|a_2a_4 - a_3^2| \leq 4/9$. Pengkaji yang sama juga dalam pada tahun 2007 dalam Janteng, Halim dan Darus (2007) telah mendapatkan keputusan bagi batas atas tepat untuk fungsi bak bintang dan fungsi cembung masing-masing adalah $|a_2a_4 - a_3^2| \leq 1$ dan $|a_2a_4 - a_3^2| \leq 1/8$.

Selanjutnya, penentu Hankel kedua ini telah dikaji oleh ramai penyelidik. Beberapa pengkaji seperti Al-Refai dan Darus (2009), Abubaker dan Darus (2011), Al-Abbadi dan Darus (2012b) dan Bansal (2013). Mereka telah membincangkan dan memperoleh hasil penentu Hankel kedua bagi kelas-kelas tertentu dalam fungsi analisis.

Beberapa tahun kemudiannya, ramai pengkaji telah melihat kepada penentu Hankel ketiga. Antaranya adalah Babalola (2010) yang menggunakan pendekatan sama seperti Janteng, Halim dan Darus (2006) telah mendapatkan batas penentu Hankel peringkat ketiga bagi kelas C , S^* dan K .

Penentu Hankel ketiga yang dilambangkan sebagai $H_{3,1}(f)$ dan ditakrifkan berbentuk

$$H_{3,1}(f) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = a_3(a_2a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2a_3) + a_5(a_3 - a_2^2), \quad (1.23)$$

untuk $f \in A$ dan $a_1 = 1$. Dengan menggunakan ketaksamaan segi tiga, diperoleh

$$|H_{3,1}(f)| \leq |a_3||a_2a_4 - a_3^2| - |a_4||a_4 - a_2a_3| + |a_5||a_3 - a_2^2|. \quad (1.24)$$

Menggunakan pendekatan yang sama, beberapa penyelidik menerbitkan makalah berkaitan penentu Hankel ketiga seperti Shanmugam, Stephen dan Babalola (2014), Prajapat et al. (2015), Bansal, Maharana dan Prajapat (2015), Krishna, Venkateswarlu dan RamReddy (2015) dan Zaprawa (2017). Zaprawa (2017) telah

menambah baik penemuan Babalola pada 2017 dengan menggunakan metodologi baharu. Beliau memperoleh batas berikut:

$$|H_{3,1}(f)| = \begin{cases} \frac{49}{540} & ; f \in C, \\ 1 & ; f \in S^*, \\ \frac{41}{60} & ; f \in K. \end{cases}$$

Beliau menegaskan hasil yang beliau peroleh bukanlah yang terbaik. Setelah itu, Kwon, Lecko dan Sim (2019) menguatkan hasil Zaprawa untuk $f \in S^*$ dengan menunjukkan $|H_{3,1}(f)| \leq 8/9$ dan hasil ini diperbaik lagi oleh Zaprawa, Obradovic dan Tuneski (2021) dengan memperoleh $|H_{3,1}(f)| \leq 5/9$ untuk $f \in S^*$. Kajian turut dilakukan oleh Kowalezyk, Lecko dan Sim (2018) juga oleh Lecko, Sim dan Smiarowska (2019) memperoleh hasil bagi $|H_{3,1}(f)|$ seperti berikut:

$$|H_{3,1}(f)| = \begin{cases} \frac{4}{135} & ; f \in C, \\ \frac{1}{9} & ; f \in S^*(1/2) \end{cases}$$

dengan $S^*(1/2)$ ialah fungsi bak-bintang berperingkat separuh.

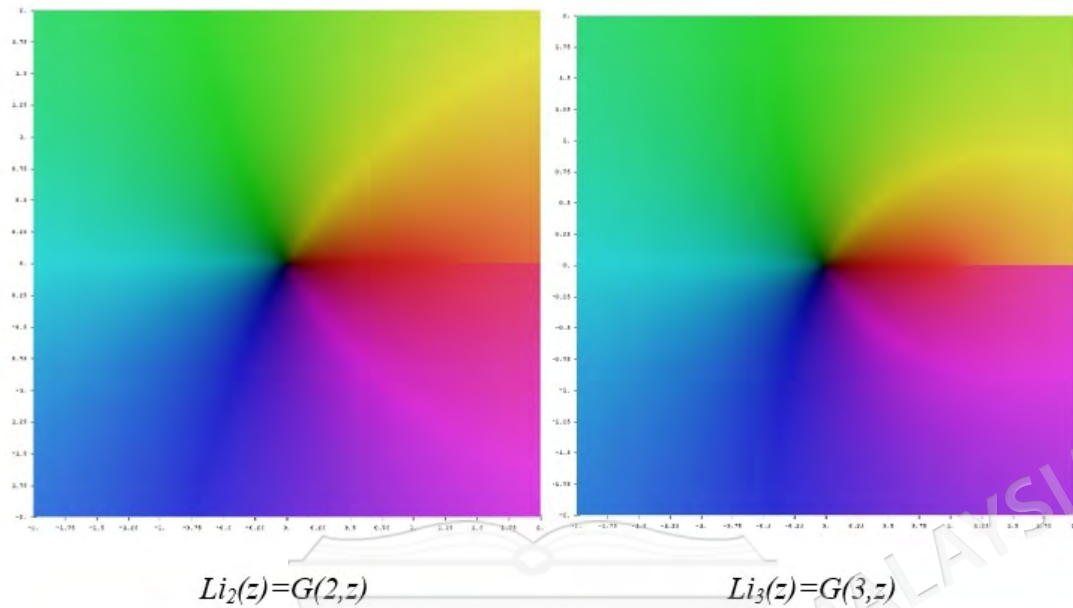
1.9 FUNGSI POLILOGARITMA

Fungsi Polilogaritma (juga dikenali sebagai fungsi de Jonquièrè) ialah fungsi khas $G(m; z)$ ditakrifkan oleh hasil tambah

$$Li_m(z) = G(m; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}, \quad (z \in \mathbb{U}).$$

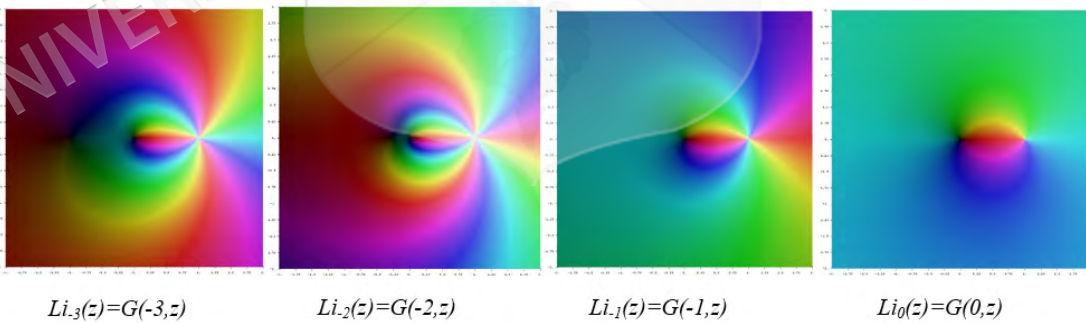
Ia secara amnya bukanlah fungsi asas, tidak seperti fungsi logaritma yang berkaitan. Takrif di atas adalah sah untuk semua nombor kompleks m dan $z \in \mathbb{U}$. Polilogaritma ditakrifkan dalam julat z yang lebih besar daripada takrif di atas yang dibenarkan oleh proses keselanjaran analisis. Kasus khas untuk nilai $n = 2$ dan $n = 3$

dinamakan dilogaritma dan trilogaritma. (Lihat Rajah 1.7).



Rajah 1.7 Fungsi dilogaritma dan trilogaritma dalam satah kompleks.

Rajah 1.8 menunjukkan fungsi polilogaritma untuk suatu nilai m yang berbeza. Ciri-ciri yang dapat diperoleh dari rajah memperlihatkan cara ia berkembang atau berperilaku dalam satah kompleks.



Rajah 1.8 Fungsi polilogaritma yang berbeza dalam satah kompleks.

Pengitlakan fungsi polilogaritma atau fungsi polilogaritma peringkat ke- m ditakrifkan seperti berikut:

$$\Phi_m(b; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+b)^m}, \quad (m, b \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{U}), \quad (1.25)$$

dengan sebarang sebutan melibatkan $n + b = 0$ dikecualikan (Bateman 1953). Menggunakan takrifan fungsi Gama, Bateman (1953) memberikan gubahan ke formula kamiran seperti berikut:

$$\Phi_m(b; z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^1 z(\log 1/t)^{m-1} \frac{t^b}{1-tz} dt, \quad \text{Ny}\{b\} > -1 \quad \text{dan} \quad \text{Ny}\{m\} > 1.$$

Fungsi (1.25) ini terturun kepada fungsi polilogaritma asal bagi kasus $\Phi_m(0; z) \equiv G(m; z)$. Diperhatikan bahawa $G(-1; z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ adalah fungsi Koebe. Maklumat lanjut berkenaan polilogaritma dalam teori fungsi univalen dijelaskan oleh Ponnusamy dan Sabapathy (1996) dan Ponnusamy (1998).

1.10 FUNGSI HIPERGEOMETRI

Fungsi hipergeometrik adalah satu kelas fungsi khas dalam matematik yang memainkan peranan penting dalam pelbagai bidang matematik dan fizik. Fungsi ini dilambangkan dengan simbol ${}_2F_1(a, b; c; z)$. Fungsi hipergeometrik mempunyai pelbagai aplikasi dalam menyelesaikan persamaan pembezaan, matematik fizik, dan analisis kompleks.

Diketahui bahawa fungsi hipergeometri Gaussian ${}_2F_1(a, b; c; z)$ ditakrifkan oleh

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_0^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n, \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (1.26)$$

adalah penyelesaian bagi persamaan pembeza homogen peringkat kedua

$$z(1-z)w''(z) + [c - (a+b+1)z]w'(z) - abw(z) = 0,$$

yang $(a)_n$ ialah simbol Pochhammer ditakrifkan oleh

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 0; \\ a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), & \text{untuk } n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (1.27)$$

dengan a, b, c adalah nombor kompleks dengan $c \neq 0, -1, -2, \dots$. Keterangan lanjut

berkenaan fungsi hipergeometri dalam fungsi univalen boleh lihat dalam kertas kerja oleh Shanmugam (2007).

1.11 PENGOPERASIAN

Kajian ini menerbitkan pengoperasian baharu melibatkan pengoperasian bersifat terbitan dan kamiran. Pengoperasian asal yang diperoleh daripada kajian penyelidikan terdahulu akan digunakan bagi mendapatkan pengoperasian baharu. Pengoperasian terbitan terawal diberikan oleh Ruscheweyh (1975) yang menyatakan seperti berikut:

Takrif 1.11.1. (Ruscheweyh 1975) Untuk fungsi $f \in A$, pengoperasian D^δ , $f : A \rightarrow A$, ditakrifkan sebagai

$$D^\delta f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\delta+1}} * f(z), \quad (\delta > -1; z \in \mathbb{U}),$$

yang $*$ adalah hasil darab Hadamard dan

$$D^m = \frac{z(z^{m-1}f(z))^{(m)}}{m!}, \quad (m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}; z \in \mathbb{U}).$$

Jika f diberikan oleh (1.2), dapat dilihat bahawa

$$D^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C(m,n) a_n z^n,$$

yang

$$C(m,n) = \binom{n+m-1}{m} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (j+m)}{(n-1)!}, \quad (m \in \mathbb{N}_0, n \geq 2). \quad (1.28)$$

Untuk $z \in \mathbb{U}$, diperoleh

$$\begin{aligned} D^0 f(z) &= f(z) \\ D^1 f(z) &= z f'(z) \\ 2D^2 f(z) &= z(D^1 f(z))' + D^1 f(z) \\ &\vdots \\ z(D^m f(z))' &= (m+1)D^{m+1} f(z) - mD^m f(z). \end{aligned}$$

Sejak tahun 1975, ramai pengkaji telah meneroka sifat pengoperasian ini secara geometri dan secara analisis seperti Ahuja (1985), Owa et al. (1986) dan Ahuja dan Silverman (1989).

Satu lagi pengoperasian terbitan yang cukup popular dalam kalangan penyelidik ialah pengoperasian Salagean yang diperkenalkan pada tahun 1983 dan diberi seperti berikut:

Takrif 1.11.2. (Salagean 1983). Untuk $f \in A$ dan $j \in \mathbb{N}$, pengoperasian $D^j : A \rightarrow A$, ditakrifkan oleh

$$D^j f(z) = f(z) * \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n \right)$$

dan

$$D^0 f(z) = f(z) D^1 f(z) = Df(z) = z f'(z)$$

$$D^j f(z) = D(D^{j-1} f(z)).$$

Jika f diberi oleh (1.2), dapat dilihat

$$D^j f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n, (j \in \mathbb{N}_0).$$

Pengoperasian kamiran pula wujud pada tahun 1965. Pengoperasian kamiran yang popular yang diperkenalkan oleh Libera (1965). Beliau menyatakan bahawa

$$F(z) = L(f)(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt, \quad (f \in A; z \in \mathbb{U}),$$

dan telah menunjukkan lebih awal bahawa $L(S^* \subset S^*, L(C) \subset C$ dan $L(C) \subset C$ (Libera 1964). Kemudian pada 1969, Bernardi mengitlak hasil ini dengan mengkaji pengoperasi kamiran yang lebih am seperti berikut:

Takrif 1.11.3. (Bernardi 1969) Untuk $f \in A$ dan c nombor nyata sedemikian hingga $c > -1$. Maka untuk $z \in \mathbb{U}$ diberi

$$F(z) = L_c(f)(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^{\infty} t^{c-1} f(t) dt.$$

Dapat diperhatikan bahawa pengoperasian terbitan Ruscheweyh, terbitan Salagean dan juga kamiran Libera telah wujud sebelum pembuktian terkaan Bieberbach diselesaikan oleh de Branges pada tahun 1985. Kajian pengoperasian ini diteruskan oleh Al-Oboudi (2004) dan telah memperkenalkan pengitlakan pengoperasian terbitan Salagean yang diberikan seperti berikut:

Takrif 1.11.4. (Al-Oboudi 2004). Untuk $f \in A$, pengoperasian $D_\lambda^k : A \rightarrow A$, ditakrifkan oleh

$$D_\lambda^k f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + \lambda(n-1)]^k a_n z^n,$$

yang $k \in \mathbb{N}_0, \lambda \geq 0, z \in \mathbb{U}$.

Manakala, pada tahun 2006, Al-Shaqsi dan Darus (2006) memperkenalkan pengitlakan pengoperasian terbitan Ruscheweyh yang diberikan seperti berikut:

Takrif 1.11.5. (Al-Shaqsi dan Darus 2006) Untuk $f \in A$, pengoperasian teritlak terbitan Ruscheweyh $D_\lambda^\delta : A \rightarrow A$, ditakrifkan seperti berikut:

$$D_\lambda^\delta f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + \lambda(n-1)] C(m, n) a_n z^n,$$

yang $m \in \mathbb{N}_0, \lambda \geq 0, z \in \mathbb{U}$ dan

$$C(m, n) = \binom{n+m-1}{m} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (j+m)}{(n-1)!}, (m \in \mathbb{N}_0, n \geq 2).$$

Sekali lagi, Al-Shaqsi dan Darus (2008) menerbitkan pengoperasi yang lebih teritlak. Pengoperasian ini mengitlakkan pengoperasi terbitan Salagean dan Rucheweyh ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 1.11.6. (Al-Shaqsi dan Darus 2008) Untuk $f \in A$, pengoperasian terbitan terbitan Ruscheweyh $D_\lambda^{m,k} : A \rightarrow A$, ditakrifkan seperti berikut:

$$D_\lambda^{m,k} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + \lambda(n-1)]^k C(m,n) a_n z^n,$$

yang $m \in \mathbb{N}_0, \lambda \geq 0, z \in \mathbb{U}$ dan

$$C(m,n) = \binom{n+m-1}{m} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (j+m)}{(n-1)!}, (m \in \mathbb{N}_0, n \geq 2).$$

Apabila $\lambda = 1$ dan $m = 0$, diperoleh pengoperasian terbitan Salagean (1983), apabila $k = 0$ diperoleh pengoperasi terbitan Ruscheweyh (1975) dan apabila $m = 0$, diperoleh pengoperasian Al-Oboudi (2004).

Perkembangan kajian pengoperasian ini terus dilakukan oleh ramai pengkaji seterusnya seperti Darus dan Ibrahim (2008), Al-Abbadi dan Darus (2009), Al-Abbadi dan Darus (2012a) dan Eghbiq dan Darus (2016). Bagi menjamin pengoperasian yang dihasilkan adalah analisis, ia mestilah berasaskan fungsi Koebe. Jadual 1.2 menunjukkan kronologi perkembangan pengoperasian.

1.12 SUBORDINASI DAN SUPERORDINASI PEMBEZA

Konsep asas subordinasi dilambangkan dengan \prec memainkan peranan penting dalam analisis kompleks. Kajian kesusasteraan mendapati Lindelöf (1908) adalah orang pertama yang memperkenalkan konsep ini. Agak sukar untuk membuktikan kesahihannya kerana tiada penceritaan secara khusus berkenaan konsep subordinasi ini. Didapati ramai penyelidik merujuk terus kepada Littlewood (1925) dan Rogosinski (1931). Manakala Littlewood dan Rogosinski pula didapati merujuk kepada Lindelöf.

Takrif 1.12.1. (Lindelöf 1908) Andaikan $f(z) \prec F(z)$ dalam cakera unit \mathbb{U} . Maka untuk setiap $r \in [0, 1], f(\mathbb{U}_r) \subset F(\mathbb{U}_r)$.

Jadual 1.2 Kronologi perkembangan pengoperasian

Pengoperasian	Jenis
$D^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C(m,n) a_n z^n$ (Ruscheweyh 1975)	Terbitan Ruscheweyh
$D^j f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n^j a_n z^n, (j \in \mathbb{N}_0)$ (Salagean 1983)	Terbitan Salagean
$F(z) = L(f)(z) = \frac{z}{2} \int_0^z f(t) dt$ (Libera 1965)	Kamiran Libera
$F(z) = L_c(f)(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt$ (Bernardi 1969)	Kamiran Bernardi
$D_{\lambda}^k f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + \lambda(n-1)]^k a_n z^n$ $k \in \mathbb{N}_0, \lambda \geq 0$ (Al-Oboudi 2004)	Terbitan teritlak Salagean
$D_{\lambda}^{\delta} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + \lambda(n-1)] C(m,n) a_n z^n ;$ $m \in \mathbb{N}_0, \lambda \geq 0$ (Al-Shaqsi dan Darus 2006)	Terbitan Al-Shaqsi-Darus
$D_{\lambda}^{m,k} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + \lambda(n-1)]^k C(m,n) a_n z^n ;$ $m, k \in \mathbb{N}_0, \lambda \geq 0$ (Al-Shaqsi dan Darus 2008)	Terbitan teritlak Al-Shaqsi-Darus
$D_{\alpha,\beta,\lambda}^k f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [\beta(n-1)(\lambda - \alpha) + 1]^k a_n z^n ;$ $\beta > 0, 0 \leq \alpha < \lambda, k \in \mathbb{N}_0$ (Darus dan Ibrahim 2008)	Terbitan teritlak Salagean-Al-Aboudi
$D_{\alpha,\beta,\lambda,\sigma}^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} [(\lambda - \sigma)(\beta - \alpha)(n-1) + 1]^m a_n z^n ;$ $\alpha, \beta, \lambda, \sigma \geq 0, \lambda > \sigma, \beta > \alpha$ and $m \in \mathbb{N}_0$ (Ramadhan dan Darus 2010)	Terbitan Ramadhan-Darus
$D_{\lambda,v,\rho}^m(\alpha, \omega) f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{v+(n-1)(\rho+\lambda)\omega^\alpha}{v} \right]^m a_n z^n ;$ $v > 0, \rho, \omega, \lambda, \alpha \geq 0, m \in \mathbb{N}_0$ (Eghbib dan Darus 2016)	Terbitan Eghbiq-Darus

Subordinasi pembeza menjadi begitu penting dalam teori fungsi univalen. Eenigenburg, Mocanu dan Reade (1984) mula melihat penggunaannya semasa mengkaji sifat fungsi Bazilevič. Dari itu, konsep subordinasi pembeza yang sering digunakan pada masa kini diberi oleh Miller dan Mocanu (1981) yang menyatakan:

Takrif 1.12.2. (Miller dan Mocanu 1981) Untuk dua fungsi f dan g dalam cakera unit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, fungsi f dikatakan subordinat bagi fungsi g dalam \mathbb{U} , ditulis

$$f(z) \prec g(z) \quad \text{atau} \quad (f \prec g), \quad (z \in \mathbb{U})$$

jika wujud fungsi analisis Schwarz $w(z)$ dalam \mathbb{U} dengan $w(0) = 0$, dan $|w(z)| < 1$ sedemikian hingga $f(z) = g(w(z))$.

Secara khusus, jika fungsi $g(z)$ univalen dalam \mathbb{U} , maka subordinasi tersebut adalah setara dengan mengatakan $f(0) = g(0)$ dan $f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$.

Konsep pembeza subordinasi juga diperkenalkan oleh Miller dan Mocanu (2000) dan ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 1.12.3. (Miller dan Mocanu 2000) Andaikan $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dan h univalen dalam \mathbb{U} . Jika p analisis dalam \mathbb{U} dan memenuhi subordinasi pembeza

$$\varphi(p(z), zp'(z)) \prec h(z),$$

maka p disebut sebagai penyelesaian bagi pembeza subordinasi.

Fungsi univalen q disebut sebagai penyelesaian dominan bagi pembeza subordinasi jika $p \prec q$. Jika p dan $\varphi(p(z), zp'(z))$ univalen dalam \mathbb{U} dan memenuhi pembeza subordinasi $h(z) \prec \varphi(p(z), zp'(z))$, maka p disebut sebagai penyelesaian pembeza subordinasi.

Fungsi analisis q disebut sebagai penyelesaian subordinan pembeza superordinasi jika $q \prec p$. Subordinan univalen \tilde{q} yang memenuhi $q \prec \tilde{q}$ untuk semua subordinan q dikatakan terbaik (Miller dan Mocanu 2003).

Miller dan Mocanu (2000) telah menyatakan tentang penggunaan teori pembeza subordinasi dalam bidang persamaan terbitan, persamaan terbitan separa, teori fungsi meromorfi, teori fungsi harmonik, pengoperasi kamiran kompleks dan ruang Banach. Darus (2012) menyatakan dalam bukunya berkenaan penggunaan

subordinasi dan superordinasi dalam fungsi analisis adalah untuk melihat hubungan penyelesaian persamaan terbitan bilinear (pecahan linear) dalam satah kompleks. Dalam satah nyata, penggunaan kerap kali dilihat dalam bidang fizik dan kejuruteraan (Darus 2012).

1.13 OBJEKTIF KAJIAN

Berikut disenaraikan objektif kajian

1. Memperkenalkan pengoperasian baharu fungsi analisis melibatkan pengoperasi Srivastava-Choi dan polilogaritma teritlak dan mengkaji sifat-sifatnya. (BAB 2)
2. Mengenalpasti penentu Hankel peringkat kedua dan penentu Hankel peringkat ketiga bagi kelas fungsi melibat fungsi polilogaritma teritlak. (BAB 3)
3. Mengkaji subordinasi dan mendapatkan ketaksamaan Fekete-Szego pengoperasian baharu analog- q pengoperasian polilogaritma teritlak menggunakan konsep kalkulus kuantum. (BAB 4 dan 5)
4. Menentukan anggaran pekali bagi subkelas fungsi analisis dan bi-univalen melibatkan dua fungsi iaitu fungsi Fox-Wright dan fungsi polinomial Faber dan mengenalpasti anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki-Owa. (BAB 6)
5. Memperkenalkan pengoperasian baharu fungsi ganjil univalen dan p -valen yang diterbitkan menggunakan kaedah pembezaan Salagean dan mengkaji sifat-sifatnya. (BAB 7 dan BAB 8)
6. Memperkenalkan dan mengkaji pengoperasian pengkamir teritlak bagi fungsi p -valen dalam pengertian fungsi bak-bintang Janowski dan menerbitkan syarat cukup yang perlu bagi pengoperasi p -valen bak-bintang dan p -valen hampir cembung seragam. (BAB 9)
7. Mengkaji subordinasi, superordinasi dan sifat-sifat bagi suatu subkelas baharu pengitlakan fungsi analisis jenis Koebe. (BAB 10)

1.14 ORGANISASI PENULISAN

Dalam bab satu, dinyatakan teorem-teorem dan takrif yang berkaitan dengan topik dan bab dalam kajian ini.

Dalam bab dua, dimulakan dengan memperkenalkan pengoperasian baharu yang diperoleh daripada pengoperasian kamiran Srivastava-Choi $\Phi^*(z, s, b, q)$ dan pengoperasian pembeza polilogaritma teritlak $\mathcal{D}_\lambda^m f(z)$. Hasil darab Hadamard di antara kedua fungsi ini memberikan pengoperasian pembeza-kamiran yang baharu $\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^\eta f(z)$. Selepas itu, akan dibincangkan beberapa sifat dalam subkelas baharu $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$ seperti batas pekali, batas erotan, titik ekstrim, jejari hampir cembung, kebak-bintangan and ketaksamaan kecembungan min terkamir, hasil darab Hadamard terubah suai and hasil tambah separa.

Bab tiga pula membincangkan berkenaan penentu Hankel peringkat kedua $H(2,2)f(z)$ dan penentu Hankel peringkat ketiga $H(3,1)f(z)$ bagi kelas fungsi $N(m, \lambda)$.

Seterusnya, bab empat membincangkan permasalahan bagi mendapatkan ketaksamaan Fekete-Szegö bagi pengoperasian polilogaritma- q teritlak menggunakan konsep kalkulus kuantum dalam subkelas bak-bintang- q dan juga subkelas cembung- q .

Dalam bab lima, perbincangan menumpu kepada subordinasi bagi analog- q pengoperasian Al-Shaqsi-Darus yang diperoleh menggunakan konsep kalkulus kuantum.

Kajian dalam bab enam, menumpukan untuk mengkaji anggaran pekali bagi subkelas fungsi yang analisis dan bi-univalen. Kajian anggaran pekali ini melibatkan dua fungsi iaitu fungsi Fox-Wright dan fungsi polinomial Faber selain itu turut dikaji anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki-Owa.

Manakala dalam bab tujuh dan lapan, diperkenal pengoperasian fungsi ganjil univalen dan p -valen yang diterbitkan menggunakan kaedah pembezaan Salagean.

$$H(n, z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}.$$

Diperkenalkan kelas fungsi $T_n(\alpha)$, seterusnya dikaji beberapa sifat bagi kelas ini seperti pekali ketaksamaan, teorem pertumbuhan dan erotan, kombinasi linear cembung dan hasil tambah separa.

Dalam bab sembilan, menumpukan kepada pengoperasian pengkamiran bagi fungsi p -valen dalam pengertian fungsi bak-bintang Janowski. Dalam kajian ini diterbitkan syarat cukup yang perlu bagi pengoperasian p -valen bak-bintang dan p -valen hampir cembung seragam dalam \mathbb{U} .

Akhir sekali, bab sepuluh kajian beralih kepada mendapatkan subordinasi dan superordinasi bagi suatu subkelas baharu yang merupakan subkelas fungsi univalen $M_b(\alpha, \lambda, \beta, \eta)$. Seterusnya, diberi kes-kes yang penting bagi hasil utama yang diperoleh untuk menentukan pilihan bagi fungsi h dan juga hasil teori klasik subordinasi dan superordinasi pembeza secara am.

Justeru, susunan bab dalam tesis ini disusun dengan bab dua hingga enam lebih menumpu kepada kajian melibatkan fungsi polilogaritma. Manakala bab tujuh hingga sepuluh menumpu kepada kajian melibatkan kelas fungsi pengoperasian baharu.

BAB II

SUBKELAS BAHARU MENGGUNAKAN PENGOPERASIAN FUNGSI SRIVASTAVA-CHOI DAN POLILOGARITMA TERITLAK

2.1 PENGENALAN DAN TAKRIFAN

Pengenalan dan kajian berkenaan pengoperasian telah muncul pada awal kajian teori fungsi pemboleh ubah kompleks. Pengoperasian pertama telah diperkenalkan pada tahun pertama abad kedua puluh oleh ahli matematik iaitu Alexander (1915). Selepas itu beberapa lagi penyelidik telah menerbitkan pengoperasian mereka antaranya, Libera (1965), Bernardi (1969), Jung, Kim dan Srivastava (1993), Ruscheweyh (1975), Salagean (1983) dan ramai lagi. Penggunaan pengoperasian telah memudahkan pengenalan kelas khas fungsi univalen dan seterusnya mengkaji sifat fungsi dalam kelas tersebut, seperti kecembungan, kebakbintangan, anggaran pekali dan sifat erotan.

Pada tahun 1915, Alexander (1915) telah memperkenalkan pengoperasian kamiran Alexander. Manakala, pada tahun 1983 telah menakrifkan pengoperasian terbitan yang dikenali sebagai pengoperasian terbitan Salagean Salagean (1983). Hasil kerja Alexander dan Salagean telah dirujuk ramai penyelidik dan telah digunakan dalam mendapatkan kelas fungsi baharu dan membuktikan banyak hasil menarik yang berkaitan dengannya.

Pendekatan terkini adalah dengan menggabungkan pengoperasian terbitan bersama pengoperasian kamiran seperti yang dilakukan oleh beberapa penyelidik seperti Acu dan Oros (2020), Oros (2020), Oros dan Lupas (2020) dan juga Oros (2023) yang menjalankan kajian pengoperasian melibatkan gabungan pengoperasian Ruscheweyh dan Bernardi.

Justeru, memberi inspirasi dalam kajian yang dibincangkan dalam bab ini. Perbincangan akan menumpu pada pengoperasian baharu hasil gabungan pengoperasian kamiran Srivistava-Choi dan pengoperasian terbitan fungsi polilogaritma teritlak.

2.2 PENGOPERASIAN BAHARU PEMBEZA-KAMIRAN

Dalam bahagian ini, akan dilihat terlebih dahulu definisi pengoperasian kamiran Srivastava-Choi yang diperoleh daripada fungsi Lerch zeta. Fungsi Lerch zeta juga dipanggil fungsi Hurwitz-Lerch diterbitkan pada tahun 1887. Ia dinamakan sempena ahli matematik Czech iaitu Mathias Lerch, yang menerbitkan kertas kerja berkenaan fungsi ini.

Takrif 2.2.1. (Srivistava dan Choi 2001) Fungsi Hurwitz-Lerch zeta teritlak $\Phi(z, s, b)$ ditakrifkan oleh

$$\Phi(z, s, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+b)^s},$$

dengan $s \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ apabila $|z| < 1$, dan $\text{Ny}\{s\} > 1$ apabila $|z| = 1$. Diperhatikan bahawa,

$$\Phi(z, s, b) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt.$$

Katalah

$$\begin{aligned} \Phi(z, s, b, q) &= ((b+nq)^s z \Phi(z, s, b)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b+nq}{n+b} \right)^s z^{n+1} \\ &= z + \left(\frac{b+q}{1+b} \right)^s z^2 + \left(\frac{b+2q}{2+b} \right)^s z^3 + \dots \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s z^n. \end{aligned}$$

Ambil fungsi f seperti yang ditakrifkan oleh (1.2). Ditakrifkan fungsi $\Phi^*(z, s, b, q)$ seperti berikut:

$$\Phi^*(z, s, b, q) = (\Phi(z, s, b, q)) * f(z),$$

maka

$$\Phi^*(z, s, b, q) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{b + (n-1)q}{n+b-1} \right)^s a_n z^n \quad (2.1)$$

dengan $s \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ apabila $|z| < 1$, dan $\text{Ny}\{s\} > 1$ apabila $|z| = 1$.

Seterusnya, ditunjukkan bagaimana pengoperasian polilogaritma teritlak diperkenalkan oleh Al-Shaqsi dan Darus (2008). Fungsi polilogaritma $G(m; z)$, ($m \in \mathbb{C}$) juga dikenali sebagai fungsi Jonquiére's. Al-Shaqsi dan Darus (2008) memperkenalkan fungsi $(G(m; z))^{(-1)}$ seperti berikut:

$$G(m; z) * (G(m; z))^{(-1)} = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} (\lambda > -1, m \in \mathbb{N}) \quad (2.2)$$

dan memperoleh pengoperasian linear berikut

$$D_{\lambda}^m f(z) = (G(m; z))^{(-1)} * f(z). \quad (2.3)$$

Untuk $\lambda > -1$, diperoleh

$$\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)_n}{n!} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda+1)_{n-1}}{(n-1)!} z^n, (z \in \mathbb{U}), \quad (2.4)$$

dengan $(\lambda+1)_{n-1}$ ialah simbol Pochhammer

$$(\lambda+1)_{n-1} = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{(\lambda+n-1)!}{\lambda!}.$$

Dengan mengambil (2.1.3) dan (2.4) ke dalam (2.3), diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} z^n * (G(m; z))^{(-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} z^n, (z \in \mathbb{U}).$$

Oleh itu, fungsi $(G(m; z))^{(-1)}$ boleh ditulis dalam bentuk berikut:

$$(G(m; z))^{(-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^m \frac{(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} z^n, (z \in \mathbb{U}). \quad (2.5)$$

Seterusnya, Al-Shaqsi dan Darus (2008) memberikan takrifan berikut:

Takrif 2.2.2. (Al-Shaqsi dan Darus 2008) Untuk $f \in A$, fungsi polilogaritma teritlak ditakrifkan seperti berikut $\mathfrak{P}_\lambda^m f(z) : A \rightarrow A$

$$\mathfrak{P}_\lambda^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^m (n + \lambda - 1)!}{\lambda! (n - 1)!} a_n z^n, \quad (2.6)$$

dengan $m, \lambda \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, z \in \mathbb{U}$.

Untuk penerangan lebih lanjut mengenai polylogaritma dalam teori fungsi univalen, lihat Ponnusamy dan Sabapathy (1996) serta Ponnusamy (1998).

Dengan menggunakan hasil darab Hadamard melibatkan pengoperasian kamiran $\Phi^*(z, s, b, q)$ dalam (2.1) dan (2.5) memberikan pengoperasian pembeza-kamiran $\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z)$ seperti berikut:

$$\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z) = \Phi^*(z, s, b, q) f(z) * (G(m; z))^{(-1)}.$$

Maka diperoleh,

$$\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{b + (n-1)q}{n+b-1} \right)^s \frac{n^m (n + \lambda - 1)!}{\lambda! (n - 1)!} a_n z^n \quad (2.7)$$

dengan $s \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ apabila $|z| < 1$, $\text{Ny}\{s\} > 1$ dan $m, \lambda \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, z \in \mathbb{U}$.

Perhatikan bahawa $\Upsilon_{0,b,q,0}^0 f(z) = f(z)$.

Dengan mengambil nilai-nilai paramater tertentu ke dalam pengoperasian $\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z)$ diperoleh pengoperasian yang diperkenal oleh penyelidik yang lepas, antaranya:

1. $\Upsilon_{s,b+1,0,0}^0 f(z) \equiv J_{s,b} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{b+1}{k+b} \right)^s a_n z^n$, (Attiya dan Aouf 2007).
2. $\Upsilon_{1,1,0,0}^0 f(z) \equiv A(f)(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} a_n z^n$, Alexander pada tahun 1915 (lihat Duren (1983)).
3. $\Upsilon_{1,2,0,0}^0 f(z) \equiv L(f)(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n+1} a_n z^n$ (Libera 1965).

4. $\Upsilon_{1,a+1,0,0}^0 f(z) \equiv L_a(f)(z) = \frac{a+1}{z^a} \int_0^z t^{a-1} f(t) dt = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a+1}{k+a}\right) a_n z^n, a > -1,$
(Bernardi 1969).
5. $\Upsilon_{\sigma,2,0,0}^0 f(z) \equiv I^\sigma(f)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k+1}\right)^\sigma a_n z^n, a > -1,$ (Jung, Kim dan Srivastava 1993).
6. $\Upsilon_{0,b,q,\lambda}^0 f(z) \equiv \mathfrak{R}_\lambda(f)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!}\right) a_n z^n,$ (Ruscheweyh 1975).
7. $\Upsilon_{0,b,q,0}^m f(z) \equiv \mathfrak{S}^m(f)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} (n^m) a_n z^n,$ (Salagean 1983).

Untuk $0 \leq \delta < 1, 0 < \nu \leq 1$ dan $0 < \gamma \leq 1,$ katalah $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}(\delta, \nu, \sigma) \in A$ mengandungi fungsi-fungsi dalam bentuk (1.2) yang memenuhi ketaksamaan:

$$\left| \frac{(\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - 1}{2\gamma((\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - \delta) - ((\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - 1)} \right| < \nu. \quad (2.8)$$

Dengan mewakilkan nilai-nilai tertentu pada s, m, δ and σ dalam kelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}(\delta, \nu, \sigma),$ diperoleh subkelas penting yang telah dikaji oleh ramai penyelidik sebelum ini.

1. Apabila $m = \delta = s = \lambda = 0$ dan $\gamma = 1,$ diperoleh kelas fungsi f yang memenuhi syarat

$$\left| \frac{f'(z) - 1}{f(z) + 1} \right| < \nu.$$

Ini adalah kelas fungsi yang dikaji oleh Caplinger dan Causey (1973).

2. Apabila $m = s = \lambda = 0$ dan $\gamma = 1,$ diperoleh kelas fungsi f yang memenuhi syarat

$$\left| \frac{f'(z) - 1}{f(z) + 1 - 2\delta} \right| < \nu,$$

dengan $0 \leq \delta < 1, 0 < \nu \leq 1,$ telah dikaji oleh Gupta dan Jain (1976).

3. Apabila $m = s = \lambda = 0, \nu = 1$ dan $\gamma = 1,$ diperoleh pula fungsi f yang memenuhi syarat

$$\left| \frac{f'(z) - 1}{2\gamma(f(z) - \delta) - (f'(z) - 1)} \right| < 1.$$

Ini merupakan kajian oleh Juneja dan Mogra (1978).

Selanjutnya, ambil $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \sigma) = \mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}(\delta, \nu, \sigma) \cap T$ yang T adalah kelas yang ditakrif oleh (1.12).

2.3 SIFAT BAGI SUBKELAS DENGAN PEKALI NEGATIF

Dalam bahagian ini, akan dibincangkan beberapa sifat dalam subkelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$ seperti batas pekali, batas erotan, titik ekstrim, jejari hampir cembung, kebakbintangan dan ketaksamaan kecembungan min terkamir, hasil darab Hadamard terubah suai dan hasil tambah separa.

2.3.1 Ketaksamaan pekali

Bahagian ini akan membincangkan batas pekali bagi kelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$ yang akan digunakan dalam teorem seterusnya.

Teorem 2.3.1. *Katalah fungsi f seperti ditakrifkan oleh Silverman (1975) dalam (1.12).*

Maka $f \in \mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^(\delta, \nu, \gamma)$ jika dan hanya jika*

$$\sum_{n=2}^{\infty} n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b + (n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| |a_n| \leq 2\nu\gamma(1-\delta) \quad (2.9)$$

dengan $s \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ apabila $|z| < 1$, $\text{Ny}\{s\} > 1$ dan $m, \lambda \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $z \in \mathbb{U}$.

Hasil yang diperoleh adalah memenuhi bagi fungsi

$$f(z) = z - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n. \quad (2.10)$$

Bukti.

Andaikan ketaksamaan (2.9) benar dan ambil $|z| \leq 1$. Maka secara hipotesisnya, daripada subkelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$ diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| (\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - 1 \right| - \nu |2\gamma((\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - \delta) - ((\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - 1)| \\ &= \left| - \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{b + (n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) a_n z^{n-1} \right| \\ &= \nu \left| 2\gamma(1-\delta) - \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{b + (n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) (2\gamma-1) a_n z^{n-1} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} n \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| |a_n| - 2v\gamma(1-\delta) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} n \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| v(2\gamma-1)|a_n| \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n [1 + v(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| |a_n| \\
&\quad - 2v\gamma(1-\delta) \leq 0 \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n [1 + v(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| |a_n| \\
&\leq 2v\gamma(1-\delta).
\end{aligned}$$

Oleh itu, $f \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, v, \gamma)$.

Dalam pembuktian syarat cukup, andaikan bahawa $f \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, v, \gamma)$. Maka diperoleh

$$\left| \frac{(\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - 1}{2\gamma((\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - \delta) - ((\Upsilon_{s,b,q,\lambda}^m f(z))' - 1)} \right| < v$$

seterusnya

$$\frac{\left| -\sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) a_n z^{n-1} \right|}{\left| 2\gamma(1-\delta) - \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) (2\gamma-1) a_n z^{n-1} \right|} < v$$

mengimplikasikan

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| a_n z^{n-1}}{2\gamma(1-\delta) - \sum_{n=2}^{\infty} n \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| (2\gamma-1) |a_n z^{n-1}|} \right\} < v. \quad (2.11)$$

Oleh kerana $\text{Ny}(z) \leq |z|$ untuk semua z . Dengan mengambil $z \rightarrow 1^-$ untuk nilai nyata dalam (2.11), diperoleh ketaksamaan (2.9).

Sekarang, untuk fungsi

$$f(z) = z - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n,$$

dengan

$$|a_n| = n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|$$

untuk $n \geq 2$.

Maka

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| |a_n| \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| \\ & \times \left(\frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} \right) \\ &= 2\nu\gamma(1-\delta). \end{aligned}$$

Oleh itu, pembuktian telah lengkap. Daripada Teorem 2.3.1, diperoleh korolari berikut.

Korolari 2.3.2. Misalkan fungsi f ditakrifkan oleh (1.12) dan $f \in \mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, maka

$$|a_n| \leq \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{\sum_{n=2}^{\infty} n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right| \right|} \quad (2.12)$$

dengan $s \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ apabila $|z| < 1$, $Ny \{s\} > 1$ dan $m, \lambda \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, z \in \mathbb{U}$.

Bukti.

Teorem 2.3.1 diberikan oleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| |a_n| \leq 2\nu\gamma(1-\delta).$$

Seterusnya diperoleh

$$|a_n| \leq \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{\sum_{n=2}^{\infty} n[1+\nu(2\gamma-1)] \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|}.$$

2.3.2 Titik ekstrim

Bahagian ini akan mengkaji berkaitan titik ekstrim kelas fungsi $f \in \mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$. Berikut dinyatakan teorem berkaitan titik ekstrim melibatkan kelas fungsi $f \in \mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$ dan pembuktiannya.

Teorem 2.3.3. *Katalah $f_1(z) = z$ dan*

$$f_n(z) = z - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n, (n \geq 2).$$

Maka f adalah kelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^(\delta, \nu, \gamma)$ jika dan hanya jika boleh diungkapkan dalam bentuk*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n f_n(z) \tag{2.13}$$

dengan $\omega_n \geq 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = 1$.

Bukti.

Andaikan f boleh ditulis seperti (2.13). Maka

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n f_n(z) \\ &= \omega_1 f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_n(z) \\ &= \omega_1 f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \left(z - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n z - \left(\sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n \right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \right) z - \left(\sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n \right) \\
&= z - \left(\sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n \right).
\end{aligned}$$

Sekarang,

$$\begin{aligned}
f(z) &= z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n \\
&= z - \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n
\end{aligned}$$

supaya

$$|a_n| = \omega_n \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}.$$

Oleh kerana,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \omega_n = 1 - \omega_1 \leq 1,$$

oleh itu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \omega_n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} \\
&\times \omega_n \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} |a_n| \leq 1,
\end{aligned}$$

iaitu

$$\sum_{n=2}^{\infty} n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right| |a_n| \leq 2\nu\gamma(1-\delta).$$

Maka (2.9) diterima. Justeru, $f \in \mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, daripada Teorem 2.3.1 (Mencukupi).

Sebaliknya, andaikan bahawa f ditakrifkan oleh (1.12) dalam kelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$. Maka dengan menggunakan (2.12), dan memilih

$$\omega_n = \frac{n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} |a_n|, (n \geq 2),$$

dan $\omega_1 = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n$. Maka

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n = z - \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} \\ &= z - \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n [z - f_n(z)] = z - \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n z + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_n(z) \\ &= \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \right) z + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_n(z) = \omega_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_n(z) \\ &= \omega_1 f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n f_n(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n f_n(z). \end{aligned}$$

Oleh itu pembuktian telah lengkap.

2.3.3 Teorem pertumbuhan dan erotan

Sifat pertumbuhan dan erotan bagi fungsi f dalam kelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$ diberikan seperti berikut:

Teorem 2.3.4. Suatu fungsi f ditakrifkan oleh (1.12) merupakan kelas kepada $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$. Maka untuk $|z| = r < 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} & r - \frac{\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right|]} r^2 \leq |f(z)| \\ & \leq r + \frac{\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right|]} r^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dan

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{4\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right|]} r \leq |f'(z)| \\ & \leq 1 + \frac{4\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right|]} r. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bukti.

Oleh kerana $f \in \mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, dan ketaksamaan (2.9) bagi Teorem 2.3.1, diperoleh

$$\begin{aligned} & [1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right|] \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \\ & \leq \sum_{n=2}^{\infty} [1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|] |a_n| \\ & \leq 2\nu\gamma(1-\delta), \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Maka

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right|]}. \quad (2.16)$$

Setelah ketaksamaan diperoleh daripada (1.12) dan (2.16), andaikan bahawa $|z| = r$, bagi memperoleh ketaksamaan berikutnya. Oleh kerana

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$$

diperoleh

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |f(z)| \leq |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-2} \leq r + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \\ &\leq r + \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right]} r^2. \end{aligned}$$

Jadi

$$|f(z)| \geq r - r^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq r - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right]} r^2.$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| |z|^{n-1} \leq 1 + 2r \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \\ &\leq 1 + \frac{4\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right]} r \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| |z|^{n-1} \geq 1 - 2r \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \\ &\geq 1 - \frac{4\nu\gamma(1-\delta)}{[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \right]} r. \end{aligned}$$

Ini melengkapkan pembuktian.

2.3.4 Jejari bagi kebakbintangan dan kecembungan

Dalam teorem berikut, diperoleh jejari bagi kebakbintangan, kecembungan dan hampir kecembungan untuk kelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$.

Teorem 2.3.5. *Ambil fungsi f ditakrifkan oleh (1.12) dalam kelas $\mathcal{Q}_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$. Maka f hampir cembung peringkat β , ($0 \leq \beta < 1$) dalam cakera $|z| < r$, dengan*

$$r := \inf_{n \geq 2} \left(\frac{(1-\beta)[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right]}{2\nu\gamma(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Hasil diperoleh adalah tepat dengan fungsi f diberikan oleh (2.12).

Bukti.

Diberikan $f \in T$ dan f adalah fungsi hampir cembung peringkat β dalam cakera $|z| < r$ jika dan hanya jika

$$|f'(z) - 1| < 1 - \beta, \quad \text{apabila } |z| < r. \quad (2.17)$$

Bagi pembuktian dari kiri (2.17) diperoleh

$$|f'(z) - 1| \leq \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}.$$

Maka (2.17) diimplikasi oleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1-\beta} |a_n||z|^{n-1} < 1.$$

Menggunakan fakta bahawa $f \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, jika dan hanya jika

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} |a_n| \leq 1,$$

didapati bahawa (2.17) adalah benar jika

$$\frac{n}{1-\beta} |z|^{n-1} \leq \frac{n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)},$$

apabila $|z| < r$.

Oleh itu,

$$r := \inf_{n \geq 2} \left(\frac{(1-\beta)[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Dengan ini pembuktian telah lengkap.

Teorem 2.3.6. Katalah fungsi f ditakrifkan oleh (1.12) dalam kelas $Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$.

Maka

(1) f adalah bak-bintang peringkat β , ($0 \leq \beta < 1$) dalam cakera $|z| < r$, yang

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad (|z| < r, 0 \leq \beta < 1),$$

dengan

$$r := \inf_{n \geq 2} \left(\frac{n(1-\beta)[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)(n-\beta)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

(2) f adalah cembung peringkat β , ($0 \leq \beta < 1$) dalam cakera $|z| < r$, yang

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{1 + zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \beta, \quad (|z| < r, 0 \leq \beta < 1),$$

dengan

$$r := \inf_{n \geq 2} \left(\frac{n(1-\beta)[1 + \nu(2\gamma-1) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)(n-\beta)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Kedua-dua keputusan ini adalah memenuhi fungsi ekstrema diberikan oleh (2.12).

Bukti.

Pembuktian untuk (1), diberikan $f \in T$ ditakrifkan oleh (1.12) dan f adalah bak-bintang peringkat β dalam cakera unit $|z| < r$ jika dan hanya jika

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1 - \beta, \quad \text{apabila } |z| < r. \quad (2.18)$$

Bagi pembuktian dari kiri (2.18) diperoleh

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^{n-1}}.$$

Maka (2.18) diimplikasi oleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\beta}{1-\beta} |a_n| |z|^{n-1} < 1.$$

Menggunakan fakta bahawa $f \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, jika dan hanya jika

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} |a_n| \leq 1,$$

(2.17) adalah benar bagi setiap $z \in \mathbb{C}$ dalam cakera $|z| < r$ jika

$$\frac{n-\beta}{1-\beta} |z|^{n-1} \leq \frac{n[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)(n-\beta)},$$

Oleh itu,

$$r := \inf_{n \geq 2} \left(\frac{n(1-\beta)[1 + \nu(2\gamma - 1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Dengan ini pembuktian telah lengkap.

Seterusnya, dengan menggunakan kaedah pembuktian yang sama seperti dalam Teorem 2.3.1 dapat ditunjukkan hasil yang diperoleh adalah memenuhi fungsi ekstrim (2.12).

Pembuktian untuk (2), dengan menggunakan fakta bahawa f adalah cembung peringkat β jika dan hanya jika $zf'(z)$ adalah bak-bintang peringkat β , jadi (2) dapat dibuktikan menggunakan pendekatan yang sama untuk (1).

2.3.5 Ketaksamaan kamiran min

Untuk membuktikan hasil melibatkan ketaksamaan kamiran min, diperlukan konsep subordinasi yang diterangkan dalam bab satu dan menggunakan lema yang diperkenalkan oleh Littlewood (1925) seperti berikut:

Lema 2.3.7. (Littlewood 1925) Jika fungsi f, g analisis dalam \mathbb{U} dengan $f \prec g$, maka

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^y d\theta \leq \int_0^{2\pi} |g(z)|^y d\theta, \quad (z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, y > 0).$$

Berikut, dinyatakan kamiran min:

Teorem 2.3.8. Katalah fungsi $f \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, dan f_n ditakrifkan oleh

$$f_n(z) = z - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^n. \quad (2.19)$$

Jika wujud fungsi analisis $w(z)$ diberikan oleh

$$(w(z))^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} a_n z^{n-1},$$

maka, untuk $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, diperoleh

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^y d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta})|^y d\theta, \quad (z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, y > 0).$$

Bukti.

Ambil f ditakrifkan dalam (1.12) dan $f_n(z)$ diberikan oleh (2.19). Perlu ditunjukkan

$$\int_0^{2\pi} \left| 1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \right|^y d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| 1 - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^{n-1} \right|^y d\theta, \quad (z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, y > 0).$$

Daripada Lema 2.3.7, cukup jika ditunjukkan bahawa

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \prec 1 - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} z^{n-1}. \quad (2.20)$$

Jika subordinasi (2.20) benar, maka diperoleh fungsi analisis ω dengan $\omega(0) = 0$

dan $|\omega(z)| < 1$ sehingga

$$1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} = 1 - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|} [w(z)]^{n-1}. \quad (2.21)$$

Setelah dipermudahkan, diperoleh

$$[\omega(z)]^{n-1} = \frac{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1},$$

yang memberikan $\omega(0) = 0$. Bagi fungsi ω , diperoleh

$$\begin{aligned} |\omega(z)|^{n-1} &= \left| \frac{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1} \right|, \\ |\omega(z)|^{n-1} &\leq \frac{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n |z|^{n-1}, \\ &\leq |z| \frac{n[1+\nu(2\gamma-1)] \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \right|}{2\nu\gamma(1-\delta)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (2.9) diperoleh

$$|\omega(z)|^{n-1} \leq |z| < 1.$$

Dengan ini pembuktian teorem telah lengkap.

2.3.6 Hasil darab Hadamard terubahsuai

Katalah $f_j(z)$, ($j = 1, 2$) ditakrifkan oleh

$$f_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n, \quad \text{untuk semua } (a_{n,j} \geq 0, z \in \mathbb{U}). \quad (2.22)$$

Hasil darab Hadamard terubahsuai bagi f_1 dan f_2 ditakrifkan oleh

$$(f_1 * f_2)(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,1} a_{n,2} z^n.$$

Menggunakan teknik yang digunakan oleh Schild dan Silverman (1977), dapat dibuktikan hasil berikut:

Teorem 2.3.9. *Katalah fungsi $f_j(z)$, ($j = 1, 2$) ditakrifkan oleh (2.22), Misalkan $f_1 \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, dan $f_2 \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \mu, \gamma)$. Maka $(f_1 * f_2)(z) \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \gamma, \xi)$, dengan*

$$\xi = \frac{2\nu\mu\gamma(1-\delta)}{\left[2\left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!}\right) \left|\left(\frac{b+q}{b+1}\right)^s\right| \frac{(1+\nu(2\gamma-1))}{(1+\mu(2\gamma-1))^{-1}}\right] - 4\nu\mu\gamma^2(1-\delta) + 2\gamma(1-\delta)\nu\mu}. \quad (2.23)$$

Hasil diperoleh adalah tepat bagi fungsi

$$f_1(z) = z - \frac{2\nu\gamma(1-\delta)}{2[1 + \nu(2\gamma-1)\left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!}\right) \left|\left(\frac{b+q}{b+1}\right)^s\right|]} z^2$$

dan

$$f_2(z) = z - \frac{2\mu\gamma(1-\delta)}{2[1 + \mu(2\gamma-1)\left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!}\right) \left|\left(\frac{b+q}{b+1}\right)^s\right|]} z^2.$$

Bukti.

Daripada Teorem 2.3.1, adalah cukup ditunjukkan bahawa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1 + \xi(2\gamma-1) \left|\left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1}\right)^s\right| \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!}\right)]}{2\xi\gamma(1-\delta)} a_{n,1} a_{n,2} z^{n-1} \leq 1,$$

untuk ξ ditakrifkan oleh (2.23). Sekarang, $f_1(z)$ dan $f_2(z)$ masing-masing berada dalam $Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$ dan $Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \mu, \gamma)$. Diperoleh,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1 + \nu(2\gamma-1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!}\right) \left|\left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1}\right)^s\right|]}{2\nu\gamma(1-\delta)} a_{n,1} a_{n,2} \leq 1,$$

dan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1 + \mu(2\gamma - 1)] \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|}{2\mu\gamma(1-\delta)} a_{n,1} a_{n,2} \leq 1.$$

Menerusi ketaksamaan Cauchy-Shwarz, diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|}{2\gamma(1-\delta)} \sqrt{\left(\frac{(1+\nu(2\gamma-1))}{\nu} \right) \left(\frac{(1+\mu(2\gamma-1))}{\mu} \right)} a_{n,1} a_{n,2} \leq 1,$$

Oleh itu, sudah cukup dengan menunjukkan bahawa

$$\frac{(1+\xi(2\gamma-1))}{\xi} a_{n,1} a_{n,2} \leq \sqrt{\left(\frac{(1+\nu(2\gamma-1))}{\nu} \right) \left(\frac{(1+\mu(2\gamma-1))}{\mu} \right)} a_{n,1} a_{n,2}$$

atau kesetaraanya

$$\sqrt{a_{n,1} a_{n,2}} \leq \frac{\xi}{(1+\xi(2\gamma-1))} \sqrt{\left(\frac{(1+\nu(2\gamma-1))}{\nu} \right) \left(\frac{(1+\mu(2\gamma-1))}{\mu} \right)},$$

untuk $n \geq 2$.

Diperhatikan bahawa

$$\sqrt{a_{n,1} a_{n,2}} \leq \frac{2\gamma(1-\delta)}{n \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|} \sqrt{\left(\frac{\nu}{(1+\nu(2\gamma-1))} \right) \left(\frac{\mu}{(1+\mu(2\gamma-1))} \right)}.$$

Akibatnya, hanya perlu dibuktikan bahawa

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma(1-\delta)}{n \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|} \sqrt{\left(\frac{\nu}{(1+\nu(2\gamma-1))} \right) \left(\frac{\mu}{(1+\mu(2\gamma-1))} \right)} \\ & \leq \frac{\xi}{(1+\xi(2\gamma-1))} \sqrt{\left(\frac{(1+\nu(2\gamma-1))}{\nu} \right) \left(\frac{(1+\mu(2\gamma-1))}{\mu} \right)} \end{aligned}$$

atau, setara bahawa

$$\xi \leq \frac{2\gamma(1-\delta)v\mu}{\left[n \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right| \frac{(1+v(2\gamma-1))}{(1+\mu(2\gamma-1))^{-1}} \right] - 4v\mu\gamma^2(1-\delta) + 2\gamma(1-\delta)v\mu}.$$

Oleh kerana

$$\psi(n) = \frac{2\gamma(1-\delta)v\mu}{\left[n \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right| \frac{(1+v(2\gamma-1))}{(1+\mu(2\gamma-1))^{-1}} \right] - 4v\mu\gamma^2(1-\delta) + 2\gamma(1-\delta)v\mu}, \quad (2.24)$$

ialah fungsi menokok bagi $n(n \geq 2)$. Dengan memilih $n = 2$ dalam (2.24), diperoleh

$$\xi \leq \psi(2) = \frac{2\gamma(1-\delta)}{\left[2 \left(\frac{2^m(\lambda+1)!}{\lambda!} \right) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \right| \frac{(1+v(2\gamma-1))}{(1+\mu(2\gamma-1))^{-1}} \right] - 4v\mu\gamma^2(1-\delta) + 2\gamma(1-\delta)v\mu},$$

yang melengkapkan pembuktian.

Teorem 2.3.10. *Katalah fungsi $f_j(z)$, ($j = 1, 2$) ditakrifkan oleh (2.22), kelas bagi $Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, v, \gamma)$. Maka fungsi*

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n,1}^2 + a_{n,2}^2) z^n,$$

berada dalam kelas $Q_{m,s,b,q,\lambda}^(\delta, v, \gamma)$, dengan*

$$\varphi = \frac{4v^2\gamma(1-\delta)}{\left[2(1+v(2\gamma-1))^2 \left(\frac{2^m(\lambda+1)!}{\lambda!} \right) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \right| \right] - 8v^2\gamma^2(1-\delta) - 4v^2\gamma(1-\delta)}.$$

Bukti.

Daripada Teorem 2.9, diperoleh

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{2v\gamma(1-\delta)} \right] a_{n,1}^2, \\ & \leq \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{2v\gamma(1-\delta)} a_{n,1} \right]^2 \leq 1 \quad (2.25) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{2v\gamma(1-\delta)} \right] a_{n,2}^2, \\ & \leq \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{2v\gamma(1-\delta)} a_{n,2} \right]^2 \leq 1. \quad (2.26) \end{aligned}$$

Daripada (2.25) dan (2.26), diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{2v\gamma(1-\delta)} \right]^2 (a_{n,1}^2 + a_{n,2}^2) \leq 1.$$

Oleh itu, ketaksamaan berikut harus dipenuhi untuk mendapatkan φ terbesar

$$\begin{aligned} & \frac{n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{2v\gamma(1-\delta)} \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{2v\gamma(1-\delta)} \right]^2, \end{aligned}$$

iaitu

$$\varphi \leq \frac{4v^2\gamma(1-\delta)}{\left[n[1 + v(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right| \right]^2 - 8v^2\gamma^2(1-\delta) - 4v^2\gamma(1-\delta)}.$$

Oleh kerana,

$$\chi(n) = \frac{4v^2\gamma(1-\delta)}{\left[n[1 + v(2\gamma-1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right| \right] - 8v^2\gamma^2(1-\delta) - 4v^2\gamma(1-\delta)},$$

ialah fungsi menokok.

Dengan memilih $n = 2$, diperoleh

$$\varphi \leq \chi(2) = \frac{4v^2\gamma(1-\delta)}{\left[2[1 + v(2\gamma-1) \left(\frac{2^m(\lambda-1)!}{\lambda!} \right) \left| \left(\frac{b+q}{b+1} \right)^s \right| \right] - 8v^2\gamma^2(1-\delta) - 4v^2\gamma(1-\delta)}.$$

Dengan ini pembuktian telah lengkap.

2.3.7 Hasil tambah separa

Silverman (1997) telah menentukan batas bawah tepat pada bahagian nyata untuk pembahagi antara fungsi bak-bintang ternormal dan juga fungsi cembung ternormal dan jujukan hasil tambah separa.

Bahagian ini akan menggunakan pendekatan Silverman (1997) dalam mendapatkan hasil tambah separa bagi fungsi analisis. Akan dikaji nisbah fungsi dalam bentuk (1.2) dan juga hasil tambah separa dalam bentuk

$$f_n(z) = z + \sum_{n=2}^n a_n z^n, \quad (z \in \mathbb{U}), \quad (2.27)$$

apabila nilai pekali-pekali cukup kecil untuk memenuhi (2.9). Lebih jelas lagi akan ditentukan batas bawah tepat bagi

$$\text{Ny} \left\{ \frac{f(z)}{f_n(z)} \right\}, \quad \text{Ny} \left\{ \frac{f_n(z)}{f(z)} \right\}, \quad \text{Ny} \left\{ \frac{f'(z)}{f'_n(z)} \right\} \quad \text{dan} \quad \text{Ny} \left\{ \frac{f'_n(z)}{f'(z)} \right\}.$$

Untuk tujuan ini, akan digunakan hasil kajian yang diketahui iaitu

$$\text{Ny} \left\{ \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \right\} > 0, \quad (z \in \mathbb{U}),$$

jika dan hanya jika $w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ memenuhi ketaksamaan $|w(z)| < |z|$.

Teorem 2.3.11. *Katalah $f \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, dan memenuhi (2.9), maka*

$$\text{Ny} \left\{ \frac{f(z)}{f_n(z)} \right\} > 1 - \frac{1}{c_{n+1}}, \quad (z \in \mathbb{U}), \quad (2.28)$$

dan

$$\text{Ny} \left\{ \frac{f_n(z)}{f(z)} \right\} > \frac{c_{n+1}}{1+c_{n+1}}, \quad (z \in \mathbb{U}), \quad (2.29)$$

dengan c_n ditakrifkan seperti berikut:

$$c_n = \frac{n[1 + \nu(2\gamma - 1) \left(\frac{n^m(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} \right) \left| \left(\frac{b+(n-1)q}{n+b-1} \right)^s \right|]}{\gamma(1-\delta)}.$$

Hasil diperoleh adalah tepat bagi setiap n dengan fungsi diberi oleh

$$f(z) = z - \frac{z^{n+1}}{c_{n+1}}, \quad (z \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}). \quad (2.30)$$

Bukti.

Bagi membuktikan (2.28), ditunjukkan bahawa

$$\begin{aligned} c_{n+1} \left\{ \frac{f(z)}{f_n(z)} - \left(1 - \frac{1}{c_{n+1}} \right) \right\} &= \frac{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{n+1} a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1}} \\ &= \frac{1 + A(z)}{1 + B(z)}. \end{aligned}$$

Di sini

$$A(z) = \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{n+1} a_k z^{k-1} \quad \text{dan} \quad B(z) = \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1}.$$

Disusun

$$\frac{1+w(z)}{1-w(z)} = \frac{1+A(z)}{1+B(z)},$$

sehingga

$$w(z) = \frac{B(z) - A(z)}{2 + A(z) + B(z)}.$$

Maka

$$w(z) = \frac{c_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{n+1} a_k z^{k-1}},$$

diperhatikan bahwa $w(0) = 0$ dan

$$|w(z)| \leq \frac{c_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|}{2 - 2 \sum_{k=2}^n |a_k| z^{k-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{n+1} |a_k|}.$$

Sekarang, $|w(z)| \leq 1$ jika dan hanya jika

$$2(c_{n+1}) \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq 2 - 2 \sum_{k=2}^n |a_k|,$$

yang setara dengan

$$c_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=2}^n |a_k| \leq 1. \quad (2.31)$$

Cukup ditunjukkan dari sebelah kiri (2.31) terbatas sebelah atas oleh syarat (2.9) yang setara dengan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (c_k - c_{n+1}) |a_k| + \sum_{k=2}^n (c_k - 1) |a_k| \geq 0.$$

untuk melihat fungsi yang diberi oleh (2.30) memberikan hasil yang tepat, diperhatikan bahwa untuk $z = re^{\frac{\pi i}{n}}$

$$\frac{f(z)}{f_n(z)} = 1 + \frac{z^n}{c_{n+1}} \rightarrow 1 - \frac{1}{c_{n+1}} \quad \text{apabila } z \rightarrow 1^-.$$

Bagi pembuktian bahagian kedua teorem ini, ditulis

$$\begin{aligned} (1 + c_{n+1}) \left\{ \frac{f_n}{f(z)} - \frac{c_{n+1}}{c_{n+1} + 1} \right\} &= \frac{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{n+1} a_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1}} \\ &= \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \end{aligned}$$

diperoleh

$$w(z) = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} (1 + c_{n+1}) a_k z^{k-1}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 + c_{n+1}) a_k z^{k-1}},$$

dan

$$|w(z)| \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} (1 + c_{n+1}) |a_k| z^{k-1}}{2 - 2 \sum_{k=2}^n a_k z^{k-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 + c_{n+1}) |a_k| z^{k-1}}.$$

Sekarang, $|w(z)| \leq 1$ jika dan hanya jika

$$2(1 + c_{n+1}) \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq 2 - 2 \sum_{k=2}^n |a_k|,$$

yang setara dengan

$$(1 + c_{n+1}) \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=2}^n |a_k| \leq 1.$$

Ketaksamaan dipenuhi bagi (2.29) bagi fungsi ekstremal f diberikan oleh (2.30).

Sekaligus melengkapkan pembuktian.

Teorem 2.3.12. *Andaikan $f \in Q_{m,s,b,q,\lambda}^*(\delta, \nu, \gamma)$, dan memenuhi (2.9), maka*

$$\text{Ny} \left\{ \frac{f'(z)}{f'_n(z)} \right\} \geq 1 - \frac{n+1}{c_{n+1}}, \quad (z \in \mathbb{U}), \quad (2.32)$$

dan

$$\text{Ny} \left\{ \frac{f'_n(z)}{f'(z)} \right\} \geq \frac{c_{n+1}}{n+1 + c_{n+1}}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (2.33)$$

Hasil diperoleh adalah tepat dengan fungsi yang diberi oleh (2.30).

Bukti.

Bagi membuktikan (2.32), cukup ditunjukkan bahawa

$$c_{n+1} \left\{ \frac{f'(z)}{f'_n(z)} - \left(1 - \frac{n+1}{c_{n+1}} \right) \right\} = \frac{1 + E(z)}{1 + D(z)}.$$

Disusun

$$\frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} = \frac{1 + E(z)}{1 + D(z)},$$

yang

$$D(z) = \sum_{k=2}^n k a_k \quad \text{dan} \quad E(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k \frac{c_{n+1}}{n+1} a_k z^{k-1}$$

sehingga

$$w(z) = \frac{D(z) - E(z)}{2 + 2D(z) + E(z)}.$$

Maka

$$w(z) = \frac{\frac{c_{n+1}}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k}{2 + \sum_{k=2}^n ka_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} k \frac{c_{n+1}}{n+1} a_k z^{k-1}},$$

diperhatikan bahawa $w(0) = 0$ dan

$$|w(z)| \leq \frac{\frac{c_{n+1}}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|}{2 - 2\sum_{k=2}^n k|a_k| - \sum_{k=n+1}^{\infty} k \frac{c_{n+1}}{n+1} |a_k|}.$$

Sekarang, $|w(z)| \leq 1$ jika dan hanya jika

$$\left(\frac{c_{n+1}}{n+1}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| + \sum_{k=2}^n k|a_k| \leq 1.$$

Daripada syarat (2.9) cukup ditunjukkan bahawa

$$\left(\frac{c_{n+1}}{n+1}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| + \sum_{k=2}^n k|a_k| \leq c_k|a_k|.$$

Ini adalah setara dengan menunjukkan

$$\sum_{k=2}^n (c_k - k)|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)c_k - kc_{n+1}}{n+1} |a_k| \geq 0.$$

Bagi pembuktian bahagian kedua teorem ini, ditulis

$$\begin{aligned} w(z) &= (n+1 + c_{n+1}) \left\{ \frac{f'_n(z)}{f'(z)} - \left(\frac{c_{n+1}}{n+1 + c_{n+1}} \right) \right\} \\ &= 1 - \frac{(1 + \frac{c_{n+1}}{n+1}) \sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k z^{k-1}}{1 + \sum_{k=2}^n ka_k z^{k-1}}, \end{aligned}$$

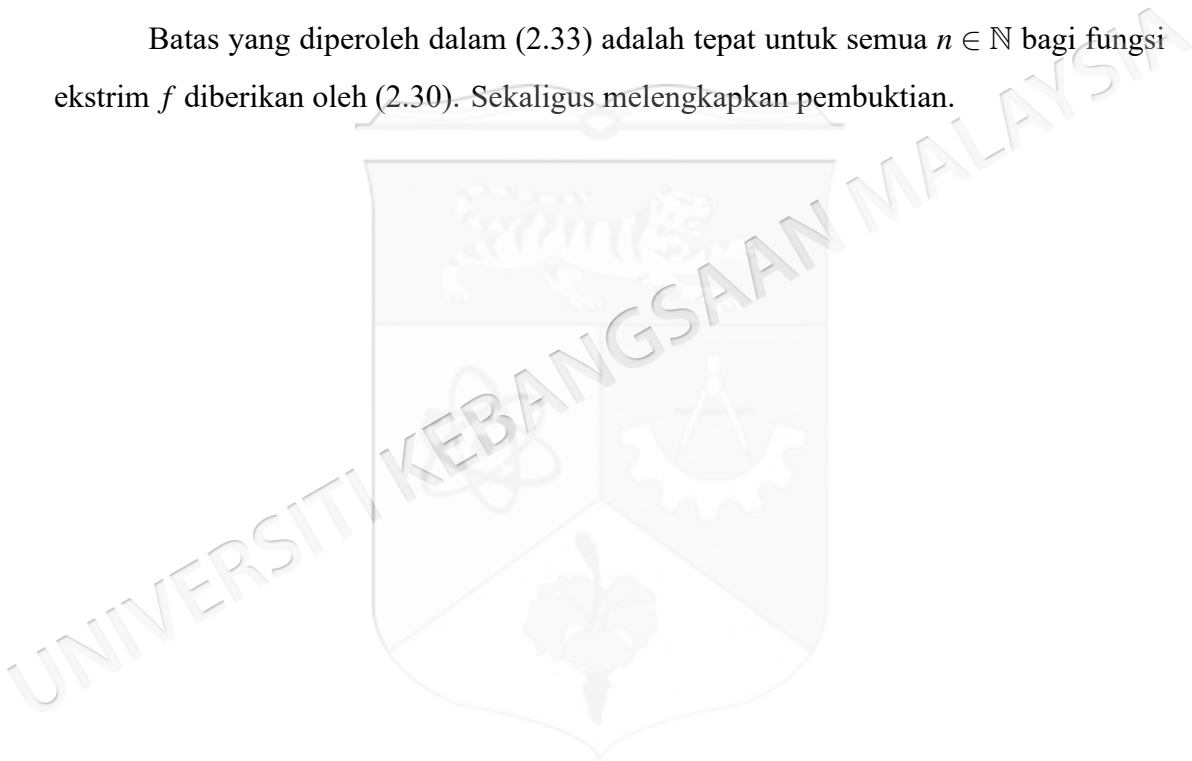
dan diperoleh

$$\left| \frac{w(z) - 1}{w(z) + 1} \right| \leq \frac{(1 + \frac{c_{n+1}}{n+1}) \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|}{2 - 2 \sum_{k=2}^n k|a_k| - (1 + \frac{c_{n+1}}{n+1}) \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|} \leq 1, \quad (z \in \mathbb{U}),$$

jika dan hanya jika

$$2 \left(1 + \frac{c_{n+1}}{n+1} \right) \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \leq 2 - 2 \sum_{k=2}^n k|a_k|.$$

Batas yang diperoleh dalam (2.33) adalah tepat untuk semua $n \in \mathbb{N}$ bagi fungsi ekstrim f diberikan oleh (2.30). Sekaligus melengkapkan pembuktian.



BAB III

PENENTU HANKEL BAGI KELAS FUNGSI YANG DITAKRIFKAN OLEH FUNGSI POLILOGARITMA TERITLAK

Di dalam Bab ini, akan dibincangkan berkenaan penentu Hankel kedua dan ketiga bagi kelas fungsi yang ditakrif oleh fungsi polilogaritma teritlak.

3.1 PENDAHULUAN

Penentu Hankel $H_{q,n}(f)$ bagi $q \geq 1$ dan $n \geq 1$ untuk fungsi pekali Taylor $f \in A$ dalam bentuk (1.2) ditakrifkan oleh Noonan dan Thomas (1976) seperti yang diberikan dalam (1.20).

Kajian melibatkan penentu Hankel, $|H_{q,n}(f)|$ telah dilakukan oleh ramai penyelidik. Dapat diperhatikan dengan mudah daripada (1.21) bahawa untuk nilai $q = 2$ dan $n = 1$, akan diperoleh teorem klasik bagi Fekete dan Szego (1933) iaitu $H_{2,1}(f) = a_3 - a_2^2$.

Fekete dan Szego (1933) telah membuat kajian awal untuk menganggarkan nilai $|a_3 - \mu a_2^2|$ bila $a_1 = 1$ dan μ adalah nyata. Ketaksamaan yang amat dikenali ini menyatakan, andai $f \in S$, maka

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} 4\mu - 3, & \text{jika } \mu \geq 1, \\ 1 + 2e^{\left(\frac{-2\mu}{1-\mu}\right)} & \text{jika } 0 \leq \mu < 1, \\ 3 - 4\mu & \text{jika } \mu < 0. \end{cases}$$

Beberapa pengkaji telah mengkaji penentu melibatkan $H_{2,1}(f)$. Sebagai contoh, Keogh dan Merkes (1969) telah membincangkan anggaran tepat bagi $|a_3 - \mu a_2^2|$ bila f adalah hampir cembung dan bak-bintang dalam \mathbb{U} . Fungsian (1.21) telah dikaji antaranya oleh Koepf (1987), London (1993), Lee, Ravichandran dan Supramaniam (2013), Krishna dan RamReddy (2015), Sokol dan Thomas (2018), Srivastava, Murugusundaramoorthy dan Bulbuoca (2022) dan beberapa pengkaji lagi dengan menggunakan penentu Hankel.

Daripada (1.22), penentu Hankel bagi $f \in A$ for $q = 2$ dan $n = 2$, yang dikenali sebagai penentu Hankel kedua, diberikan oleh $H_{2,2}(f) = a_2 a_4 - a_3^2$. Janteng, Halim dan Darus (2006) adalah yang pertama menggunakan pendekatan penentu Hankel telah mengkaji batas tepat bagi fungsi f dalam (1.2), yang melibatkan fungsi-fungsi yang terbitannya mempunyai bahagian nyata positif. Hasil kajian ini memberikan hasil $|a_2 a_4 - a_3^2| \leq 4/9$. Pengkaji yang sama juga telah mendapatkan hasil bagi batas atas tepat untuk fungsi bak-bintang dan fungsi cembung masing-masing adalah $|a_2 a_4 - a_3^2| \leq 1$ dan $|a_2 a_4 - a_3^2| \leq 1/8$ (Janteng, Halim dan Darus 2007). Selanjutnya, berbagai pengkaji telah membincangkan dan mengkaji penentu Hankel kedua bagi kelas-kelas tertentu bagi fungsi analisis seperti Abubaker dan Darus (2011), Al-Abbadi dan Darus (2012b) dan Bansal (2013).

Seperti yang ditunjukkan dalam (1.23), apabila $q = 3$ dan $n = 1$ diperoleh penentu Hankel ketiga $H_{3,1}(f)$ ditakrifkan sebagai $H_{3,1}(f) = a_3(a_2 a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2 a_3) + a_5(a_3 - a_2^2)$. Babalola turut menggunakan pendekatan sama seperti Janteng, Halim dan Darus (2006) untuk mengkaji batas penentu Hankel peringkat ketiga untuk kelas C, S^* dan K dalam kertas kerja beliau yang diterbitkan pada tahun 2010 (Babalola 2010). Seterusnya, ramai pengkaji menggunakan pendekatan yang sama menerbitkan kertas kerja berkaitan penentu Hankel ketiga seperti Shanmugam, Stephen dan Babalola (2014), Prajapat et al. (2015), Bansal, Maharana dan Prajapat (2015), Krishna, Venkateswarlu dan RamReddy (2015), (Zaprawa 2017), Zaprawa, Obradovic dan Tuneski (2021) dan beberapa pengkaji lagi.

Bab ini akan memdapatkan hasil penentu Hankel peringkat kedua dan ketiga bagi pengoperasian terbitan polilogaritma teritlak $\mathfrak{P}_\lambda^m f(z)$ diperkenalkan oleh Al-Shaqsi dan Darus (2008) yang diberikan dalam (2.2.2) ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 3.1.1. Untuk $f \in A$, polilogaritma teritlak ditakrifkan sebagai $\mathfrak{P}_\lambda^m f(z) : A \rightarrow A$

$$\mathfrak{P}_\lambda^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^m (n + \lambda - 1)!}{\lambda! (n - 1)!} a_n z^n, \quad (3.1)$$

dengan $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $z \in \mathbb{U}$ dan $\lambda > -1$. Secara jelasnya dapat diperhatikan bahawa operator $\mathfrak{P}_\lambda^m f(z)$ termasuk dalam pengoperasian terbitan dua anu, yang mana, $\mathfrak{P}_0^m = \mathfrak{P}^m$ adalah pengoperasian terbitan Sălăgean dan $\mathfrak{P}_\lambda^0 = \mathfrak{P}_\lambda$ adalah pengoperasian terbitan Ruscheweyh.

Dimotivasi oleh hasil yang diperoleh oleh pengkaji terdahulu yang telah disebut sebelum ini, kajian berkenaan batas atas untuk fungsian $|a_2 a_4 - a_3^2|$, $|a_4 - a_2 a_3|$ dan $|a_3 - a_2^2|$, bagi mendapatkan $|H_{2,2}(f)|$ dan $|H_{3,1}(f)|$ diteruskan untuk subkelas $N_\lambda^m f(z)$ ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 3.1.2. Andaikan f diberi oleh (1.2). Maka f dikatakan kelas $N_\lambda^m f(z)$ jika memenuhi ketaksamaan

$$\text{Ny} \{[\mathfrak{P}_\lambda^m f(z)]'\} > 0, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (3.2)$$

Takrif 3.1.3. Misalkan f diberikan oleh (1.2). Maka $f \in R$ jika memenuhi

$$\text{Ny} \{f'(z)\} > 0, \quad (z \in D). \quad (3.3)$$

Subkelas R telah dikaji secara sistematik oleh MacGregor (1962).

3.2 HASIL KAJIAN TERDAHULU

Lema-lema berikut diperlukan untuk pembuktian nanti.

Andaikan P adalah keluarga semua fungsi-fungsi p analisis dalam \mathbb{U} dengan $\text{Ny}\{p(z)\} > 0$ dan

$$p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots \quad (3.4)$$

untuk $z \in \mathbb{U}$.

Lema 3.2.1. (Pommerenke 1975) Jika $p \in P$ adalah dalam bentuk (3.4). Maka

$$|c_n| \leq 2 \quad \text{untuk} \quad n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}. \quad (3.5)$$

Lema 3.2.2. (Grenander dan Szego 1958). Siri kuasa bagi $p(z)$ diberikan oleh (3.4) menumpu dalam \mathbb{U} bagi fungsi P jika dan hanya jika penentu Toeplitz

$$\mathfrak{T}_n(p) = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_{-1} & 2 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & 2 \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

dan $c_{-n} = \bar{c}_n$, adalah semuanya bukan negatif kecuali bagi $p(z) = \sum_{n=1}^k \rho_n p_0(e^{it_n}z)$, $\rho_n > 0$, t_n adalah nombor nyata dan $t_n \neq t_j$ untuk $n \neq j$; dalam kasus ini $\mathfrak{T}_n(p) > 0$ bagi $n < k - 1$ dan $\mathfrak{T}_n(p) = 0$ untuk $n \geq k$.

Ini merupakan syarat cukup dan perlu disebabkan oleh Carathéodory dan Toeplitz dan boleh didapati dalam Grenander dan Szego (1958). Penentu Toeplitz boleh digunakan untuk menganggar batas atas pekali fungsian untuk kelas fungsi analisis diperkenalkan oleh Janteng, Halim dan Darus (2006).

Dengan merujuk kaedah yang diperkenalkan oleh Libera dan Zlotkiewicz (1982) dan Libera dan Zlotkiewicz (1983), boleh diandaikan tanpa halangan bahawa $c_1 > 0$. Untuk kes $n = 2$, maka daripada (3.6) diperoleh

$$T_2(p) = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & c_2 \\ c_1 & 2 & c_1 \\ \bar{c}_2 & c_1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 \operatorname{Ny} \{c_1^2 c_2\} - 2|c_2| - 4c_1^2 \geq 0,$$

adalah setara dengan

$$2c_2 = c_1^2 + x(4 - c_1^2) \quad (3.7)$$

untuk beberapa $x, |x| \leq 1$. Maka untuk $n = 3$, $T_3(p) \geq 0$ adalah setara

$$|(4c_3 - 4c_1c_2 + c_1^3)(4 - c_1^2) + c_1(2c_2 - c_1^2)^2| \leq 2(4 - c_1^2)^2 - 2|2c_2 - c_1^2|^2;$$

dengan (3.7), memberikan hubungan

$$4c_3 = c_1^3 + 2(4 - c_1^2)c_1x - c_1(4 - c_1^2)x^2 + 2(4 - c_1^2)(1 - |x|^2)z, \quad (3.8)$$

bagi beberapa nilai $z, |z| \leq 1$.

3.3 PENENTU HANKEL KEDUA BAGI KELAS FUNGSI POLILOGARITHMA TERITLAK

Bahagian ini akan membincangkan berkenaan penentu Hankel kedua bagi kelas fungsi polilogarithma teritlak. Teknik pembuktian menggunakan pendekatan yang dilakukan oleh Libera dan Zlotkiewicz (1982) dan Libera dan Zlotkiewicz (1983).

Hasil utama bagi kelas fungsi polilogaritma teritlak diperoleh seperti berikut:

Teorem 3.3.1. *Andaikan fungsi f diberikan oleh (1.2) kelas bagi fungsi $N_\lambda^m f(z)$. Maka*

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{16}{9^{m+1}(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2}. \quad (3.9)$$

Hasil yang diperoleh adalah tepat.

Bukti.

Oleh kerana $f \in N_{\lambda}^m f(z)$, daripada (3.2)

$$[\mathfrak{P}_{\lambda}^m f(z)]' = p(z). \quad (3.10)$$

Dengan menggantikan $[N_{\lambda}^m f(z)]'$ dan $p(z)$ dengan ungkapan siri yang setara dalam (3.10), diperoleh untuk suatu $z \in \mathbb{U}$,

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{m+1}(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} a_n z^{n-1} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

Seterusnya, diperoleh

$$1 + 2 \cdot 2^m (\lambda + 1) a_2 z + \frac{3 \cdot 3^m (\lambda + 2)(\lambda + 1)}{2} a_3 z^2 + \frac{2 \cdot 4^m (\lambda + 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1)}{3} a_4 z^3 + \dots = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (3.11)$$

Dengan menyamakan pekali dalam (3.11), diperoleh

$$\left\{ a_2 = \frac{1}{2} \frac{c_1}{2^m (\lambda + 1)}, a_3 = \frac{2}{3} \frac{c_2}{3^m (\lambda + 2)(\lambda + 1)}, a_4 = \frac{3}{2} \frac{c_3}{4^m (\lambda + 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1)} \right\}. \quad (3.12)$$

Mengantikan nilai-nilai a_2, a_3 dan a_4 daripada (3.12) dalam fungsian Hankel kedua $|a_2 a_4 - a_3^2|$, memberikan

$$|a_2 a_4 - a_3^2| = \frac{1}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3}{2^m 4^m (\lambda + 3)} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{(3^m)^2 (\lambda + 2)} \right|.$$

Lema 3.2.2 digunakan bagi mendapatkan batas terbaik pada

$$\frac{1}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3}{2^m 4^m (\lambda + 3)} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{(3^m)^2 (\lambda + 2)} \right|. \quad (3.13)$$

Seterusnya, bagi memudahkan kiraan, diwakilkan

$$\{u = 2^m, v = 3^m \text{ and } w = 4^m\}. \quad (3.14)$$

Justeru, persamaan (3.13) boleh ditulis sebagai

$$\frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3}{uw(\lambda + 3)} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{v^2(\lambda + 2)} \right|.$$

Dengan menggantikan nilai-nilai c_2 dan c_3 daripada (3.7) bersama (3.8) daripada Lema 3.2.2 dalam (3.13), diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3}{uw(\lambda + 3)} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{v^2(\lambda + 2)} \right| \\ &= \frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left| c^4 \left[\frac{27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)}{144uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} \right] \right. \\ & \quad + c^2(4 - c^2)x \left[\frac{27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)}{72uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} \right] \\ & \quad \left. - (4 - c^2)x^2 \left\{ \frac{[27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)]c^2 - 64uw(\lambda + 3)}{144uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3c(4 - c^2)(1 - |x|^2)z}{8uw(\lambda + 3)} \right|. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan fakta bahawa $|z| < 1$ dan ketaksamaan segi tiga serta mengambil $c_1 = c$ yang mana $c \in [0, 2]$ ditunjukkan bahawa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3}{uw(\lambda + 3)} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{v^2(\lambda + 2)} \right| \\ & \leq \frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left\{ \frac{|27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)|c^4}{144uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} + \frac{3c(4 - c^2)}{8uw(\lambda + 3)} \right. \\ & \quad + c^2(4 - c^2)\rho \frac{|27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)|}{72uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} \\ & \quad \left. + (4 - c^2)(c - 2)\rho^2 \left[\frac{27v^2(\lambda + 2)c - 16uw(\lambda + 3)(c + 2)}{144uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} \right] \right\} \\ & = F(c, \rho), \quad \text{untuk } 0 \leq \rho = |x| \leq 1. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Diandaikan bahawa batas atas bagi (3.15) berada pada titik pedalaman $\rho \in [0, 1]$ dan $c \in [0, 2]$. Seterusnya, dimaksimumkan fungsi $F(c, \rho)$ pada segiempat sama tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$.

Terbitan (3.15) terhadap ρ , memberikan

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho} = & c^2(4 - c^2) \frac{|27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)|}{72uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} \\ & + (4 - c^2)(c - 2)\rho \left[\frac{27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)(c + 2)}{72uv^2w(\lambda + 3)(\lambda + 2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Daripada (3.16) diperhatikan bahawa, $\frac{\partial F}{\partial \rho} > 0$ untuk $\rho > 0$. Justeru, (3.16) adalah fungsi menokok bagi ρ . Oleh kerana itu ia tidak mempunyai nilai maksimum dalam rantau pedalaman tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$. Maka untuk nilai tetap $c \in [0, 2]$ diperoleh

$$\underset{0 \leq \rho \leq 1}{\text{maks}} F(c, \rho) = F(c, 1). \quad (3.17)$$

Oleh itu, dengan menggantikan $\rho = 1$ dalam (3.15), memberikan

$$\begin{aligned} F(c, 1) = & \frac{1}{144vw(uv^2w\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2(\lambda + 3)} \left\{ 54v^2(\lambda + 2)(4 - c^2)c \right. \\ & + |27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)|[c^4 + 2c^2(4 - c^2)] \\ & \left. + (4 - c^2)(c - 2)[27v^2(\lambda + 2)c - 16uw(\lambda + 3)(c + 2)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

maka

$$\begin{aligned} F'(c, 1) = & \frac{1}{144uv^2w(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2(\lambda + 3)} \left\{ (4 - 3c^2)[54v^2(\lambda + 2)] \right. \\ & + 4c(4 - c^2)|27v^2(\lambda + 2) - 16uw(\lambda + 3)| \\ & + (8 - 3c^2)[27v^2(\lambda + 2)c - 16uw(\lambda + 3)(c + 2)] \\ & \left. + (4 - c^2)(c - 2)[27v^2(\lambda + 2)c - 16uw(\lambda + 3)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Daripada (3.19), diperhatikan $F'(c, 1) < 0$ untuk setiap $c \in [0, 2]$. Oleh itu, $F(c, 1)$ adalah fungsi menyusut bagi c dalam selang $c \in [0, 2]$, yang nilai-nilai maksimum didapati pada titik-titik F mestilah pada sempadan $c \in [0, 2]$. Walau bagaimanapun, $F(0, 1) \geq F(2, 1)$

oleh itu F mempunyai nilai maksimum pada $c = 0$.

Batas atas bagi (3.15) sepadan dengan $\rho = 1$ dan $c = 0$, dalam kes ini

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| &= \frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1c_3}{uv(\lambda + 3)} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{v^2(\lambda + 2)} \right| \\ &\leq \frac{16}{9v^2(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dengan menggantikan $v = 3^m$, diperoleh batas atas

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{16}{9^{m+1}(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2}. \quad (3.21)$$

Apabila $c_1 = 0$ dan $x = 1$ dalam (3.7) dan (3.8), didapati $c_2 = 2$ dan $c_3 = 0$. Menggantikan nilai ini dalam (3.20), ketaksamaan daripada hasil adalah dipenuhi.

Apabila dipilih $m = 0$ dan $\lambda = 0$ dalam Teorem 3.3.1, akan diperoleh keputusan yang bertepatan dengan Janteng, Halim dan Darus (2006) yang menyatakan $|a_2a_4 - a_3^2| \leq 4/9$.

Teorem 3.3.2. *Andaikan fungsi f diberikan oleh (1.2) dalam kelas fungsi $N_{\lambda}^m f(z)$. Maka*

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{3}{4^m(\lambda + 2)(\lambda + 3)}. \quad (3.22)$$

Keputusan yang diperoleh adalah tepat.

Bukti.

Dengan menggantikan nilai-nilai a_2, a_3 dan a_4 daripada (3.12) dalam fungsian tidak linear $|a_2a_3 - a_4|$, diperoleh

$$|a_2a_3 - a_4| = \frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)} \left| \frac{1}{3} \frac{c_1c_2}{2^m3^m(\lambda + 1)} - \frac{3}{2} \frac{c_3}{4^m(\lambda + 3)} \right|. \quad (3.23)$$

Bagi memudahkan kiraan, digantikan (3.14) dalam (3.23). Justeru, persamaan (3.23) boleh ditulis sebagai

$$\frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)} \left| \frac{1}{3} \frac{c_1c_2}{uv(\lambda + 1)} - \frac{3}{2} \frac{c_3}{w(\lambda + 3)} \right|.$$

Daripada Lema 3.2.2 dan menggantikan nilai-nilai c_2 dan c_3 daripada (3.7) bersama (3.8) dalam (3.23), diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \left| \frac{1}{3} \frac{c_1 c_2}{uv(\lambda+1)} - \frac{3}{2} \frac{c_3}{w(\lambda+3)} \right| \\ &= \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \left| \left(\frac{[8w(\lambda+3) - 18uv(\lambda+1)]}{48uvw(\lambda+1)(\lambda+3)} \right) c^3 \right. \\ & \left. + \left(\frac{4w(\lambda+3) - 18uv(\lambda+1)}{24uvw(\lambda+1)(\lambda+3)} \right) c(4-c^2)x + \frac{3}{8} \frac{(4-c^2)x^2}{w(\lambda+3)} - \frac{3}{4} \frac{(4-c^2)(1-|x|^2)z}{w(\lambda+3)} \right|, \end{aligned}$$

bagi beberapa x dan z sehingga $|x| \leq 1$ dan $|z| \leq 1$. Ketaksamaan segi tiga digunakan dengan mengambil $c_1 = c$ dan $c \in [0, 2]$, diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \left| \frac{1}{3} \frac{c_1 c_2}{uv(\lambda+1)} - \frac{3}{2} \frac{c_3}{w(\lambda+3)} \right| \\ & \leq \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \left\{ \left(\frac{[8w(\lambda+3) - 18uv(\lambda+1)]}{48uvw(\lambda+1)(\lambda+3)} \right) c^3 + \frac{3}{4} \frac{(4-c^2)}{w(\lambda+3)} \right. \\ & \left. + c(4-c^2)\rho \left(\frac{[4w(\lambda+3) - 18uv(\lambda+1)]}{24uvw(\lambda+1)(\lambda+3)} \right) + (4-c^2)\rho^2 \left[\frac{3c-6}{8w(\lambda+3)} \right] \right\} \\ & \leq \frac{1}{48uvw(\lambda+1)^2(\lambda+2)(\lambda+3)} \left\{ [8w(\lambda+3) - 18uv(\lambda+1)]c^3 \right. \\ & \left. + 36uv(4-c^2)(\lambda+1) + 2\rho(4-c^2)[4w(\lambda+3) - 18uv(\lambda+1)]c \right. \\ & \left. + 6\rho^2(4-c^2)(3c-6)uv(\lambda+1) \right\} = G(c, \rho). \end{aligned} \quad (3.24)$$

untuk $0 \leq \rho = |x| \leq 1$.

Andaikan batas atas bagi (3.23) berada pada titik pedalaman $\rho \in [0, 1]$ dan $c \in [0, 2]$. Seterusnya, dimaksimumkan fungsi $G(c, \rho)$ pada segiempat sama tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$. Oleh kerana

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \rho} &= \frac{1}{48uvw(\lambda+1)^2(\lambda+2)(\lambda+3)} \left\{ 2(4-c^2)[4w(\lambda+3) - 18uv(\lambda+1)]c \right. \\ & \left. + 12\rho(4-c^2)(3c-6)uv(\lambda+1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

dengan menggunakan kalkulus asas dapat ditunjukkan $\frac{\partial G}{\partial \rho} > 0$ untuk $\rho > 0$. Justeru

$G(c, \rho)$ adalah fungsi menokok bagi ρ oleh kerana itu tiada nilai maksimum dalam rantau pedalaman tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$. Tambahan lagi, bagi nilai tetap $c \in [0, 2]$ diperolehi

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} G(c, \rho) = G(c, 0). \quad (3.26)$$

Oleh itu, dengan menggantikan $\rho = 0$ dalam (3.24), memberikan

$$G(c, 0) = \frac{1}{48uvw(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 3)} \left\{ [8w(\lambda + 3) - 18uv(\lambda + 1)]c^3 + 36uv(4 - c^2)(\lambda + 1) \right\} \quad (3.27)$$

maka

$$G'(c, 0) = \frac{1}{48uvw(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 3)} \left\{ 3[8w(\lambda + 3) - 18uv(\lambda + 1)]c^2 - 72uv(\lambda + 1)c \right\}. \quad (3.28)$$

Daripada (3.28), diperhatikan bahawa $G'(c, 0) < 0$ bagi setiap $c \in [0, 2]$. Oleh itu, $G(c, 0)$ adalah fungsi menyusut c dalam selang $c \in [0, 2]$, yang mana nilai maksimum berlaku bagi G mesti dalam sempadan $c \in [0, 2]$. Didapati $G(0, 1) \geq G(2, 1)$, oleh itu G mempunyai nilai maksimum pada $c = 0$.

Batas atas (3.23) terkait dengan $\rho = 0$ dan $c = 0$, dalam kes ini

$$|a_2a_3 - a_4| \leq \frac{3}{w(\lambda + 2)(\lambda + 3)}. \quad (3.29)$$

Dengan mengambil $w = 4^m$, didapati batas atas

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{3}{4^m(\lambda + 2)(\lambda + 3)}. \quad (3.30)$$

Apabila mengambil $c_1 = 0$ dan memilih $x = |1|$ dalam (3.7) dan (3.8), didapati $c_2 = 2$ dan $c_3 = 0$. Dengan menggantikan nilai-nilai ini dalam (3.29), kesamaan yang diperolehi adalah dipenuhi. Pembuktian teorem disimpulkan.

Apabila memilih $m = 0$ dan $\lambda = 0$ dalam Teorem 3.3.2, akan diperoleh keputusan yang bersamaan dengan Bangsal, Maharana dan Prajabat (2015) yang memberikan $|a_2 a_4 - a_3^2| \leq 1/2$.

3.4 PENENTU HANKEL KETIGA BAGI KELAS FUNGSI POLILOGARITHMA TERITLAK

Dalam bahagian ini, kajian diteruskan untuk memperoleh penentu Hankel peringkat ketiga bagi fungsi polilogaritma teritlak. Berikut merupakan hasil yang diperoleh berserta pembuktiannya.

Teorem 3.4.1. *Andaikan fungsi f diberikan oleh (1.2) dalam kelas fungsi $N_{\lambda}^m f(z)$. Maka*

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{4}{3^{m+1}(\lambda + 1)(\lambda + 2)}. \quad (3.31)$$

Keputusan yang diperoleh dalam (3.31) adalah tepat.

Bukti.

Dengan menggantikan nilai-nilai a_2, a_3 dan a_4 daripada (3.12) dalam fungsian $|a_3 - a_2^2|$, diperoleh

$$|a_3 - a_2^2| = \frac{1}{(\lambda + 1)} \left| \frac{2}{3} \frac{c_2}{3^m(\lambda + 2)} - \frac{1}{4} \frac{c_1^2}{(2^m)^2(\lambda + 1)} \right|. \quad (3.32)$$

Bagi memudahkan pengiraan diwakilkan (3.14) dalam (3.32). Justeru, persamaan (3.32) memberikan

$$|a_3 - a_2^2| = \frac{1}{(\lambda + 1)} \left| \frac{2}{3} \frac{c_2}{v(\lambda + 2)} - \frac{1}{4} \frac{c_1^2}{u^2(\lambda + 1)} \right|.$$

Diandaikan $c_1 = c$ dan $c \in [0, 2]$, dengan menggantikan nilai-nilai c_2 dan c_3 daripada (3.7) bersama (3.8) serta menggunakan Lema 3.2.2 dalam (3.32), diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda + 1)} \left| \frac{2}{3} \frac{c_2}{v(\lambda + 2)} - \frac{1}{4} \frac{c_1^2}{u^2(\lambda + 1)} \right| \\ &= \frac{1}{(\lambda + 1)} \left| \frac{1}{3} \frac{c^3}{v(\lambda + 2)} + \frac{1}{3} \frac{c(4 - c^2)x}{v(\lambda + 2)} - \frac{1}{4} \frac{c^2}{u^2(\lambda + 1)} \right|, \end{aligned} \quad (3.33)$$

bagi beberapa x dan z sehingga $|x| \leq 1$ dan $|z| \leq 1$. Menggunakan ketaksamaan segi tiga, diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\lambda+1)} \left| \frac{2}{3} \frac{c_2}{v(\lambda+2)} - \frac{1}{4} \frac{c_1^2}{u^2(\lambda+1)} \right| \\
& \leq \frac{1}{(\lambda+1)} \left\{ \frac{1}{3} \frac{c^3}{v(\lambda+2)} + \frac{1}{3} \frac{c(4-c^2)\rho}{v(\lambda+2)} - \frac{1}{4} \frac{c^2}{u^2(\lambda+1)} \right\} \\
& \leq \frac{1}{12u^2v(\lambda+1)(\lambda+2)} \left\{ 4c^3u^2(\lambda+1) + 4c\rho u^2(4-c^2)(\lambda+1) + 3c^2v(\lambda+2) \right\} \\
& = H(c, \rho), \quad \text{untuk } 0 \leq \rho = |x| \leq 1. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Diandaikan bahawa batas atas bagi (3.32) didapati pada titik pedalaman bagi $\rho \in [0, 1]$ dan $c \in [0, 2]$. Seterusnya, dengan memaksimumkan fungsi $H(c, \rho)$ pada segi empat sama tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$. Oleh kerana

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{1}{12u^2v(\lambda+1)(\lambda+2)} \left\{ 4cu^2(4-c^2)(\lambda+1) \right\},$$

dapat ditunjukkan bahawa $\frac{\partial H}{\partial \rho} \geq 0$. Justeru, $H(c, \rho)$ adalah fungsi menokok bagi ρ , oleh kerana itu nilai maksimum tidak akan diperolehi dalam rantau pedalaman tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$. Tambahan lagi, bagi nilai tetap $c \in [0, 2]$ akan diperolehi

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} H(c, \rho) = H(c, 1). \tag{3.35}$$

Oleh itu, dengan menggantikan $\rho = 1$ dalam (3.34), setelah dipermudahkan memberikan

$$H(c, 1) = \frac{1}{12u^2v(\lambda+1)(\lambda+2)} \left\{ 4c^3u^2(\lambda+1) + 4cu^2(4-c^2)(\lambda+1) + 3c^2v(\lambda+2) \right\} \tag{3.36}$$

maka

$$\begin{aligned}
H'(c, 1) &= \frac{1}{12u^2v(\lambda+1)(\lambda+2)} \left\{ 12c^2u^2(\lambda+1) + 4u^2(4-c^2)(\lambda+1) \right. \\
&\quad \left. - 8c^2u^2(\lambda+1) + 6cv(\lambda+2) \right\}. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Daripada (3.37), diperhatikan bahawa $H'(c, 1) < 0$ bagi setiap $c \in [0, 2]$. Oleh itu, $H(c, 1)$

adalah fungsi menyusut bagi c dalam selang $c \in [0, 2]$, memberikan nilai maksimum pada titik H berada pada sempadan $c \in [0, 2]$. Walau bagaimanapun, $H(0, 1) \geq H(2, 1)$. Justeru maksimum setempat diperoleh pada $H(0, 1)$.

Batas atas bagi (3.32) berkait kepada nilai $\rho = 1$ dan $c = 0$. Justeru, diperoleh

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{4}{3v(\lambda + 1)(\lambda + 2)}. \quad (3.38)$$

Dengan menggantikan $v = 3^m$. Diperoleh batas atas

$$|a_3 - a_2^2| \leq \frac{4}{3^{m+1}(\lambda + 1)(\lambda + 2)}. \quad (3.39)$$

Dengan mengambil nilai $c_1 = 0$ dan memilih $x = |1|$ dalam (3.7) dan (3.8), diperoleh bahawa $c_2 = 2$ dan $c_3 = 0$. Dengan menggantikan nilai-nilai ini dalam (3.31), kesamaan menunjukkan fungsi yang diperoleh adalah dipenuhi.

Dengan memilih $m = 0$ dan $\lambda = 0$ dalam Teorem 8.3.1, akan diperoleh keputusan bertepatan dengan Babalola (2010) yang menunjukkan $|a_3 - a_2^2| \leq 2/3$. Jika f dalam bentuk (1.2), maka $|a_n| \leq 2/n$, ($n = 2, 3, \dots$) (Macgregor 1962).

Menggunakan pekali-peka ini bersama dalam Teorem 3.3.1, 3.3.2 dan 3.4.1, akan diperoleh

$$\begin{aligned} |H_{3,1}(f)| &\leq |a_3| |(a_2 a_4 - a_3^2)| - |a_4| |(a_4 - a_2 a_3)| + |a_5| |(a_3 - a_2^2)| \\ &\leq \frac{2}{3} \left(\frac{16}{9^{m+1}(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^2} \right) - \frac{2}{4} \left(\frac{3}{4^m(\lambda + 2)(\lambda + 3)} \right) \\ &\quad + \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3^{m+1}(\lambda + 1)(\lambda + 2)} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Justeru, dinyatakan bahawa:

Teorem 3.4.2. *Andaikan fungsi f diberi oleh (1.2) merupakan kelas fungsi $N_{\lambda}^m f(z)$. Maka*

$$|H_{3,1}(f)| \leq \frac{32}{3^{2m+3}(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2} - \frac{6}{4^{m+1}(\lambda+2)(\lambda+3)} + \frac{8}{5 \cdot 3^{m+1}(\lambda+1)(\lambda+2)}. \quad (3.41)$$

Keputusan yang diperoleh adalah dipenuhi apabila fungsi diberikan oleh

$$f'(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

Dengan mengambil $m = 0$ dan $\lambda = 0$ dalam Teorem 3.4.2, diperoleh keputusan yang bertepatan dengan Bangsal, Maharana dan Prajabat (2015) yang memberikan $|H_{3,1}(f)| \leq 439/540$.

Dengan ini telah berikan hasil bagi penentu Hankel peringkat kedua dan ketiga melibatkan fungsi polilogaritma teritlak dan juga keterkaitan hasil yang diperoleh dengan hasil kajian penyelidik terdahulu.

3.5 PENGOPERASIAN TERBITAN MITTAG-LEFFLER DALAM SEBUTAN FOX-WRIGHT DAN POLILOGARITHMA TERITLAK

Kajian berkenaan konvolusi (hasil darab Hadamard) memainkan peranan penting dalam TFG. Dengan menggunakan hasil darab Hadamard (atau konvolusi), beberapa subkelas baharu yang analisis dan univalen telah diperkenalkan dan dikaji dalam konsep-konsep yang telah diketahui seperti ketaksamaan subordinasi dan superordinasi, min kamiran dan pecahan separa, penentu Hankel dan banyak lagi.

Bagi fungsi $f \in A$ diberikan oleh (1.2) dan $g \in A$ diberikan oleh $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$, ditakrifkan hasil darab Hadamard (atau konvolusi) bagi f dan g oleh

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n, z \in \mathbb{U}. \quad (3.42)$$

Dalam topik ini diperkenalkan subkelas baharu daripada pengoperasi pembeza teritlak $M_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)$ yang diperoleh daripada konvolusi antara pengoperasi linear fungsi Mittag-Leffler teritlak dalam sebutan fungsi Fox-Wright ${}_p\Psi_q$ dan fungsi polilogaritma teritlak ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 3.5.1. (Srivastava et al. 2017) Bagi $f \in A$, pengoperasi linear untuk fungsi Mittag-Leffler teritlak dalam sebutan fungsi Fox-Wright ${}_p\Psi_q$ ditakrifkan berbentuk $\mathfrak{F}_{\alpha,\beta} f(z) : A \rightarrow A$

$$\mathfrak{F}_{\alpha,\beta} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta]} a_n z^n, \quad (3.43)$$

dengan $\text{Ny}\{\alpha\}, \text{Ny}\{\beta\} > 0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Justeru, menerusi hasil darab Hadamard (atau konvolusi), (3.43) dan (2.5). Ditakrifkan pengoperasi hasil konvolusi seperti berikut:

Takrif 3.5.2. Bagi $f \in A$, ditakrifkan oleh $\mathfrak{M}_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z) : A \rightarrow A$

$$\mathfrak{M}_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z) = \mathfrak{F}_{\alpha,\beta} f(z) * (G(m; z))^{(-1)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta) n^m (n + \lambda - 1)!}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta] \lambda! (n-1)!} a_n z^n, \quad (3.44)$$

dengan $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, dan $\min \text{Ny}\{\alpha\}, \text{Ny}\{\beta\} > 0; z \in \mathbb{U}$.

Subkelas $M_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)$ ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 3.5.3. Andaikan f diberi oleh (1.2). Maka f dikatakan kelas $M_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)$ jika memenuhi ketaksamaan

$$\text{Ny}\{[\mathfrak{M}_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)]'\} > 0, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (3.45)$$

3.6 PENENTU HANKEL KEDUA BAGI KELAS FUNGSI MITTAG-LEFFLER DALAM SEBUTAN FOX-WRIGHT DAN POLILOGARITHMA TERITLAK

Dalam bahagian ini, diberikan hasil bagi penentu Hankel kedua bagi kelas fungsi Mittag-Leffler dalam sebutan Fox-Wright dan polilogarithma teritlak seperti berikut:

Teorem 3.6.1. *Ambil fungsi f diberikan (1.2) merupakan kelas $M_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)$. Maka*

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{16[\Gamma(2\alpha + \beta)]^2}{9 \cdot 9^m (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)^2 [\Gamma(\beta)]^2}.$$

Hasil yang diperoleh adalah tepat.

Bukti.

Oleh kerana $f \in M_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)$, menurut (3.45) wujud fungsi analisis $p \in P$ dalam cakera unit \mathbb{U} dengan $p(0) = 1$ dan $Ny \{p(z)\} > 0$ sehingga

$$[\mathfrak{M}_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)]' = p(z). \quad (3.46)$$

Tindakan menggantikan $[\mathfrak{M}_{\alpha,\beta,\lambda}^m f(z)]'$ dan $p(z)$ dengan ungkapan siri yang setara (3.46), diperoleh untuk suatu $z \in \mathbb{U}$.

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta) n^{m+1} (n + \lambda - 1)!}{\Gamma[\alpha(n-1) + \beta] \lambda! (n-1)!} a_n z^{n-1} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (3.47)$$

Daripada proses permudahkan, diperoleh

$$1 + 2 \frac{2^m (\lambda + 1) \Gamma(\beta)}{\Gamma[\alpha + \beta]} a_2 z + \frac{3 \cdot 3^m (\lambda + 2) (\lambda + 1) \Gamma(\beta)}{2 \Gamma[2\alpha + \beta]} a_3 z^2 + \frac{2 \cdot 4^m (\lambda + 3) (\lambda + 2) (\lambda + 1) \Gamma(\beta)}{3 \Gamma[3\alpha + \beta]} a_4 z^3 + \dots = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (3.48)$$

Seterusnya, dengan menyamakan pekali dalam (3.48) bagi kuasa yang sama z^0, z dan z^2 ,

masing-masing, memberikan

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} \frac{c_1 \Gamma(\alpha + \beta)}{2^m (\lambda + 1) \Gamma(\beta)} \\ a_3 = \frac{2}{3} \frac{c_2 \Gamma(2\alpha + \beta)}{3^m (\lambda + 2) (\lambda + 1) \Gamma(\beta)} \\ a_4 = \frac{3}{2} \frac{c_3 \Gamma(3\alpha + \beta)}{4^m (\lambda + 3) (\lambda + 2) (\lambda + 1) \Gamma(\beta)}. \end{cases} \quad (3.49)$$

Gantian nilai-nilai bagi a_2, a_3 dan a_4 daripada (3.49) ke dalam fungsian penentu Hankel kedua $|a_2 a_4 - a_3^2|$, memberikan

$$|a_2 a_4 - a_3^2| = \frac{1}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3 \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(3\alpha + \beta)}{8^m (\lambda + 3) [\Gamma(\beta)]^2} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2 [\Gamma(2\alpha + \beta)]^2}{9^m (\lambda + 2) [\Gamma(\beta)]^2} \right|.$$

Lemma 3.2.2 digunakan untuk mendapatkan batas wajar pada

$$\frac{1}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3 \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(3\alpha + \beta)}{8^m (\lambda + 3) [\Gamma(\beta)]^2} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2 [\Gamma(2\alpha + \beta)]^2}{9^m (\lambda + 2) [\Gamma(\beta)]^2} \right|. \quad (3.50)$$

Sekarang, bagi memudahkan langkah pengiraan, diwakilkan $r = \Gamma(\beta), s = \Gamma(\alpha + \beta), t = \Gamma(2\alpha + \beta), u = \Gamma(3\alpha + \beta), v = 8^m$ dan $w = 9^m$. Justeru, persamaan (3.50) boleh ditulis seperti berikut

$$\frac{1}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3 s u}{v (\lambda + 3) r^2} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2 t^2}{w (\lambda + 2) r^2} \right|.$$

Berikut, digantikan nilai bagi c_2 dan c_3 daripada (3.7) bersama (3.8) daripada Lemma 3.2.2 dalam (3.50), diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3 s u}{v (\lambda + 3) r^2} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2 t^2}{w (\lambda + 2) r^2} \right| \\ &= \frac{1}{(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)} \left| \frac{[27s u w (\lambda + 2) - 16t^2 v (\lambda + 3)] c^2 - 64v (\lambda + 3) t^2}{144v w (\lambda + 3) (\lambda + 2) r^2} \right. \\ & \quad + \frac{[27s u w (\lambda + 2) - 16t^2 v (\lambda + 3)]}{72v w (\lambda + 3) (\lambda + 2) r^2} c^2 (4 - c^2) x \\ & \quad - (4 - c^2) x^2 \frac{[27s u w (\lambda + 2) - 16t^2 v (\lambda + 3)] c^2 - 64v (\lambda + 3) t^2}{144v w (\lambda + 3) (\lambda + 2) r^2} \\ & \quad \left. + \frac{3c s u (4 - c^2) (1 - |x|^2) z}{8v r^2 (\lambda + 3)} \right|. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dengan menggunakan fakta bahawa $|z| < 1$ dan ketaksamaan segi tiga dan digantikan $c_1 = c$ dan $c \in [0, 2]$, dapat ditunjukkan bahawa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1 c_3 s u}{v(\lambda + 3)r^2} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2 t^2}{w(\lambda + 2)r^2} \right| \\ & \leq \frac{1}{(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)} \left\{ \frac{|27suw(\lambda + 2) - 16t^2v(\lambda + 3)|c^4}{144vw(\lambda + 3)(\lambda + 2)r^2} + \frac{3csu(4 - c^2)}{8vr^2(\lambda + 3)} \right. \\ & \quad + c^2(4 - c^2)\rho \frac{|27suw(\lambda + 2) - 16t^2v(\lambda + 3)|}{72vw(\lambda + 3)(\lambda + 2)r^2} \\ & \quad \left. + (4 - c^2)(c - 2)\rho^2 \left[\frac{27suw(\lambda + 2)c - 16t^2v(\lambda + 3)(c + 2)}{144vw(\lambda + 3)(\lambda + 2)r^2} \right] \right\} \\ & = F(c, \rho), \quad \text{untuk } 0 \leq \rho = |x| \leq 1. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Diandaikan bahawa batas atas bagi (3.52) berada pada titik pedalaman $\rho \in [0, 1]$ dan $c \in [0, 2]$. Seterusnya, dengan mengambil maksimum fungsi $F(c, \rho)$ pada segiempat sama tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$. Dengan mengambil terbitan (3.52) terhadap ρ , diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho} &= c^2(4 - c^2) \frac{|27suw(\lambda + 2) - 16t^2v(\lambda + 3)|}{72vw(\lambda + 3)(\lambda + 2)r^2} \\ & \quad + (4 - c^2)(c - 2)\rho \left[\frac{27suw(\lambda + 2)c - 16t^2v(\lambda + 3)(c + 2)}{72vw(\lambda + 3)(\lambda + 2)r^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Daripada (3.53) diperhatikan bahawa, $\frac{\partial F}{\partial \rho} > 0$ for $\rho > 0$. Oleh itu, (3.53) adalah fungsi menokok bagi ρ dan oleh kerana itu, tidak mempunyai maksimum dalam rantau pedalaman tertutup $[0, 2] \times [0, 1]$. Tambahan pula, bagi nilai tetap $c \in [0, 2]$ didapati

$$\max_{0 \leq \rho \leq 1} F(c, \rho) = F(c, 1) = G(c). \quad (3.54)$$

Oleh itu, dengan menggantikan $\rho = 1$ dalam (3.52), seterusnya permudahkan persamaan

memberikan

$$\begin{aligned}
 G(c) &= F(c, 1) \\
 &= \frac{1}{144vwr^2(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2(\lambda+3)} \left\{ 54suw(\lambda+2)(4-c^2)c \right. \\
 &\quad \left. + |27suw(\lambda+2) - 16t^2v(\lambda+3)|[c^4 + 2c^2(4-c^2)] \right. \\
 &\quad \left. + (4-c^2)(c-2)[27suw(\lambda+2)c - 16t^2v(\lambda+3)(c+2)] \right\}, \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
 G'(c) &= \frac{1}{144vwr^2(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2(\lambda+3)} \left\{ (4-3c^2)[54suw(\lambda+2)] \right. \\
 &\quad \left. + 4c(4-c^2)|27suw(\lambda+2) - 16t^2v(\lambda+3)| \right. \\
 &\quad \left. + 2c(2-c)[27suw(\lambda+2)c - 16t^2v(\lambda+3)(c+2)] \right. \\
 &\quad \left. + 2(4-c^2)[(27suw(\lambda+2)(c-1) - 16t^2v(\lambda+3)c)] \right\}. \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Daripada (3.56), didapati bahawa $G'(c) < 0$ untuk setiap $c \in [0, 2]$. Oleh itu, $G(c)$ adalah fungsi menyusut bagi c dalam selang $c \in [0, 2]$, dengan nilai-nilai maksimum pada titik G mesti pada sempadan $c \in [0, 2]$. Walau bagaimanapun, $G(c) \geq G(2)$ dan oleh itu G mempunyai nilai maksimum pada $c = 0$. Justeru, batas atas bagi (3.52) sepadan dengan $\rho = 1$ dan $c = 0$, dalam kasus ini

$$\begin{aligned}
 |a_2a_4 - a_3^2| &= \frac{1}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)} \left| \frac{3}{4} \frac{c_1c_3su}{v(\lambda+3)r^2} - \frac{4}{9} \frac{c_2^2t^2}{w(\lambda+2)r^2} \right| \quad (3.57) \\
 &= \frac{16t^2}{9wr^2(\lambda+1)^2(\lambda+2)}.
 \end{aligned}$$

Dengan menggantikan $r = \Gamma(\beta)$ dan $t = \Gamma(2\alpha + \beta)$, diperoleh batas atas

$$|a_2a_4 - a_3^2| = \frac{16[\Gamma(2\alpha + \beta)]^2}{9 \cdot 9^m [\Gamma(\beta)]^2 (\lambda+1)^2 (\lambda+2)}. \quad (3.58)$$

Apabila diset nilai $c_1 = 0$ dan dipilih $x = 1$ dalam (3.7) dan (3.8), diperoleh $c_2 = 2$ dan $c_3 = 0$. Menggantikan nilai-nilai ini dalam hasil yang diperoleh (3.57), kesamaan diperoleh, menunjukkan hasil yang diperoleh adalah tepat. Ini sebagai kesimpulan pembuktian ini.

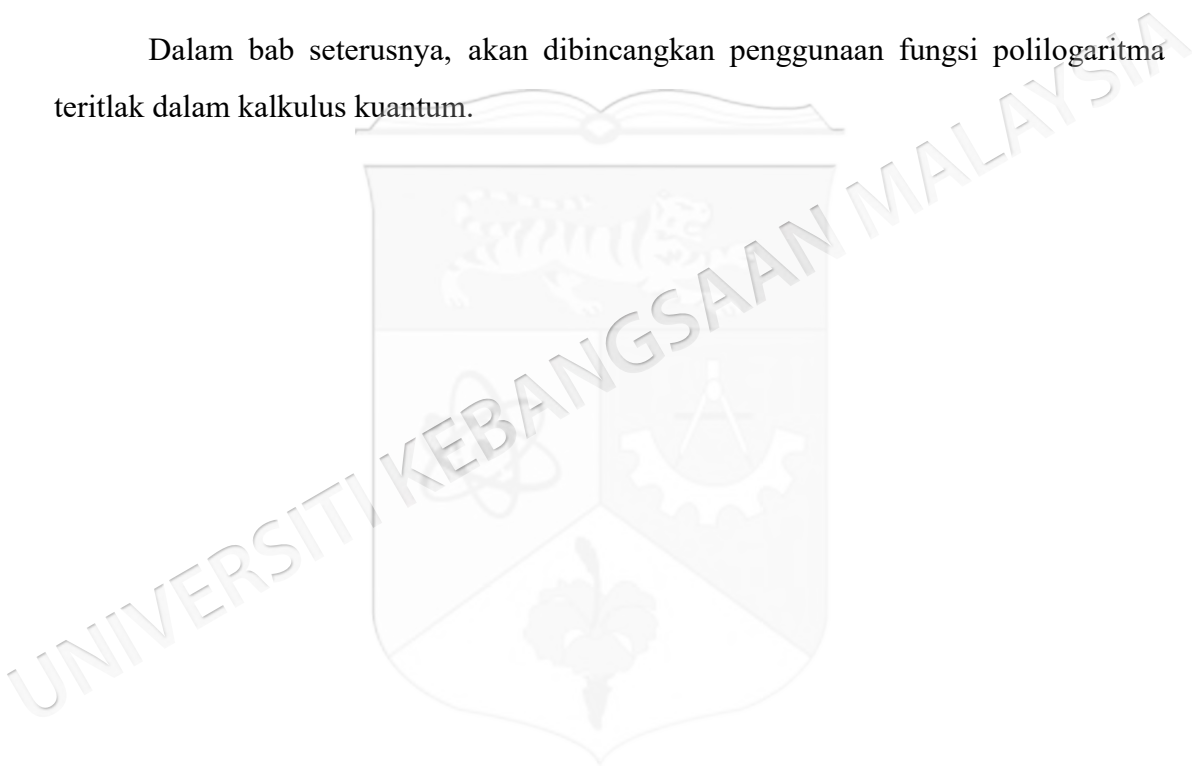
Dengan memilih nilai $\alpha = 1/2, \beta = 1, m = 0$ dan $\lambda = 0$ ke dalam Teorem 3.6.1, didapati hasil yang diperoleh sama dengan hasil Janteng, Halim dan Darus (2006) seperti yang ditunjukkan dalam korolari berikut.

Korolari 3.6.2. *Andaikan $f \in \mathfrak{M}_{1/2,1,0}^0 f(z)$. Maka*

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{4}{9},$$

hasil yang diperoleh adalah tepat.

Dalam bab seterusnya, akan dibincangkan penggunaan fungsi polilogaritma teritlak dalam kalkulus kuantum.



BAB IV

PENGOPERASIAN PEMBEZA POLILOGARITMA TERITLAK MENGUNAKAN KONSEP KALKULUS KUANTUM

4.1 PENGENALAN

Kalkulus kuantum atau kalkulus- q telah menarik minat ramai pengkaji disebabkan oleh penggunaannya dalam matematik, sains kejuruteraan dan fizik. Kalkulus- q diperkenalkan oleh ahli matematik yang hebat iaitu Leonhard Euler Euler dan Carl Gustav Jacobi, tetapi menjadi popular kerana Albert Einstein telah menggunakannya dalam mekanik kuantum pada 1905 (Pais 1979). Pada tahun 1910, Jackson (1910a) dan Jackson (1910b) kemudiannya, mengkaji dan memperkenalkan terbitan- q dan kamiran- q dalam bentuk yang lebih tersusun dan sistematik. Dapat dikatakan bahawa kalkulus- q adalah lanjutan daripada kalkulus klasik yang diperkenalkan oleh Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz.

Penggunaan kalkulus- q dalam teori fungsi geometri dilakukan oleh Ismail, Merkes dan Styer (1990). Walau bagaimanapun, Srivastava (1989) telah menulis satu bab dalam buku beliau telah memberikan konteks asas bagi kalkulus- q dalam teori fungsi geometri. Selepas itu, beberapa analog- q melibatkan pengoperasian kompleks telah diperkenalkan seperti pengoperasian Picard- q oleh Aral (2006). Seterusnya, Anastassiou dan Gal (2006) telah memperkenalkan pengoperasian kamiran Gauss-Weierstrass- q . Selain itu, telah dikaji anggaran dan sifat-sifat geometri bagi pengoperasian- q dalam beberapa subkelas fungsi analisis dalam cakera unit. Aral dan Gupta (2009) telah memperkenalkan analog- q bagi pengoperasian Baskakov-Durrmeyer dan Aldweby dan Darus (2013) pula mengkaji analog- q bagi pengoperasian Dziok-Srivastava.

Seterusnya, kajian melibatkan pengoperasian linear telah menarik minat ramai pengkaji dan banyak hasil-hasil baharu melibatkan pengoperasian linear yang sedia ada dalam sebutan analog- q telah dihasilkan. Pengoperasi- q ini ditakrifkan menggunakan konvolusi di antara fungsi analisis ternormalkan dengan fungsi hipergeometrik- q dan banyak hasil yang menarik telah diperoleh.

Contohnya, Kanas dan Raducanu (2009) telah memperkenalkan analog- q bagi pengoperasian terbitan Ruscheweyh dan telah meneliti beberapa sifat bagi pengoperasian ini dan memperkenalkan fungsi bak-bintang- q seragam dan kajian bagi pengoperasian ini di teruskan oleh Arif, Haq dan Liu (2018) yang mengkaji dalam fungsi multivalen. Aldweby dan Darus (2014) pula telah mengkaji sifat subordinasi bagi pengoperasian Ruscheweyh- q ini. Govindaraj dan Subramaniam (2017) telah meneruskan kajian kalkulus- q ini terhadap pengoperasian terbitan Salagean. Seterusnya, banyak lagi penyelidik telah mengkaji pengoperasi menggunakan konsep kalkulus kuantum antaranya Noor, Riaz dan Noor (2017) telah mengkaji pengoperasi Kamiran Bernardi- q pada tahun 2017. Seterusnya, pengoperasian kamiran Noor- q telah dikaji Arif, Haq dan Liu (2018). Noor dan Shah (2020) pula menggunakan konsep kalkulus- q dalam mengkaji pengoperasian Srivastava-Attiya- q . Manakala, kajian sifat subordinasi bagi pengoperasian Salagean- q ini telah dilakukan oleh Alb Lupaş (2022).

4.2 PENGOPERASIAN PEMBEZA BAHARU MENGGUNAKAN KALKULUS KUANTUM

Dalam bahagian ini, diterangkan konsep kalulus- q dan takrif pengoperasian pembeza baharu iaitu pengoperasian polilogaritma teritlak analog- q .

Jackson pada tahun 1990, telah memberikan takrif bagi pengoperasian terbitan- q , seperti berikut:

$$D_q f(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z}; \quad q \neq 1, z \neq 0 \quad (4.1)$$

untuk $q \in (0, 1)$.

Oleh itu, bagi fungsi $f(z) = z^n$, terbitan- q boleh ditunjukkan

$$D_q(z^n) = \frac{(q^n - q)}{q - 1} z^{n-1} = [n]_q z^{n-1}. \quad (4.2)$$

Jelas diperhatikan bahawa $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(z) = f'(z)$, dengan $f'(z)$ adalah terbitan biasa .

Sifat-sifat lain bagi D_q diperoleh daripada Exton (1983), Gasper dan Rahman (1990), Aral, Gupta dan Agarwal (2013) dan Uçar (2016) diberikan seperti berikut:

Dapat diperhatikan dengan jelas bahawa, bagi $n \in \mathbb{N}$ dan $z \in A$,

$$D_q \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} [n]_q z^{n-1}, \quad (4.3)$$

dengan

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (4.4)$$

Diberikan juga,

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q & ; n = 1, 2, \dots \\ 1 & ; n = 0. \end{cases}$$

Diperoleh beberapa petua bagi D_q :

$$\begin{aligned} D_q(af(z) \pm bg(z)) &= aD_q f(z) \pm bD_q g(z), \\ D_q(f(z)g(z)) &= f(qz)D_q(g(z)) + g(z)D_q(f(qz)), \\ D_q\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) &= \frac{D_q(f(z))g(z) - f(z)D_q(g(z))}{g(qz)g(z)}, g(qz)g(z) \neq 0, \\ D_q(\log f(z)) &= \frac{D_q(f(z))}{f(z)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Tambahan pula, kamiran- q bagi fungsi $f(z)$ diberikan oleh

$$\int_0^z f(t) d_q t = z(1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(zq^n). \quad (4.6)$$

Berikut, diperkenalkan pengoperasian terbitan polilogarithma teritlak analog- q atau dikenali sebagai pengoperasian AlShaqli-Darus- q melibatkan pengoperasi dalam

(2.6) menggunakan konsep kalkulus kuantum dengan memperkenalkan takrif berikut:

Takrif 4.2.1. Ambil $f \in A$, dilambangkan $\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)$ analog- q bagi pengoperasian fungsi polilogaritma teritlak ditakrifkan oleh

$$\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[n]_q^m [n + \lambda - 1]_q!}{[\lambda]_q! [n - 1]_q!} a_n z^n, \quad (4.7)$$

dengan $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $[n]_q$ dan $[n]_q!$ diberikan oleh (4.4).

Daripada Takrif 4.2.1, diperhatikan bahawa, jika $q \rightarrow 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z) &= z + \lim_{q \rightarrow 1} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[n]_q^m [n + \lambda - 1]_q!}{[\lambda]_q! [n - 1]_q!} a_n z^n \right], \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^m (n + \lambda - 1)!}{\lambda! (n - 1)!} a_n z^n = \mathfrak{P}_{\lambda}^m f(z), \end{aligned}$$

dengan $\mathfrak{P}_{\lambda}^m f(z)$ ialah pengoperasian polilogaritma teritlak yang ditakrifkan dalam (2.6).

Diperhatikan bahawa, dengan mengambil $\lambda = 0$ ke dalam (4.7), diperoleh $\mathfrak{P}_{q,0}^m f(z) = \mathfrak{P}_q^m f(z)$ iaitu pengoperasian terbitan Salagean- q (Govindaraj dan Subramaniam 2017). Bagi $\lambda = 0, q \rightarrow 1$, pengoperasian $\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)$ diturunkan ke pengoperasian terbitan Salagean (Salagean 1983). Diperhatikan juga, dengan memilih $m = 0$, pengoperasian $\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)$ diturunkan ke pengoperasian terbitan Ruscheweyh- q (Aldweby dan Darus 2014). Apabila mengambil $m = 0, q \rightarrow 1$, diperoleh pengoperasian Ruscheweyh (Ruscheweyh 1975).

Ditulis,

$$D_q(\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[n]_q^{m+1} [n + \lambda - 1]_q!}{[\lambda]_q! [n - 1]_q!} a_n z^{n-1}$$

dan

$$zD_q(\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[n]_q^{m+1} [n + \lambda - 1]_q!}{[\lambda]_q! [n - 1]_q!} a_n z^n.$$

Oleh itu, diperoleh identiti berikut:

$$zD_q(\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[n]_q^{m+1} [n + \lambda - 1]_q!}{[\lambda]_q! [n - 1]_q!} a_n z^n = \mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z).$$

Dimotivasikan oleh kajian daripada Aldweby dan Darus (2014) dan Alb Lupaş (2022). Kajian dalam bab ini akan mendapatkan hasil subordinasi bagi analog- q bagi pengoperasi polilogaritma teritlak yang diberikan dalam (4.7).

4.3 HASIL TERDAHULU MELIBATKAN SUBORDINASI

Seperti dalam Bab 8, beberapa lema daripada kajian terdahulu diperlukan dalam proses pembuktian bagi mendapatkan hasil subordinasi.

Antara lema yang penting ialah lema yang diberikan oleh Miller dan Mocanu (1981) dan lema oleh Miller dan Mocanu (1985) seperti yang diberikan dalam (10.3.1). Dengan menggunakan konsep terbitan- q , lema-lema ini diitlakkan oleh Aldweby dan Darus (2014) dan diberikan seperti berikut:

Lema 4.3.1. (Aldweby dan Darus 2014) Katalah h analisis dan fungsi univalen cembung \mathbb{U} dengan $h(0) = 1$ dan $g(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ analisis dalam \mathbb{U} . Jika

$$g(z) + \frac{D_q(g(z))}{c} \prec h(z), z \in \mathbb{U}, c \neq 0,$$

maka

$$g(z) \prec \frac{c}{z^c} \int_0^z t^{c-1} h(t) dt,$$

untuk $Ny(c) \geq 0$.

Lema 4.3.2. (Aldweby dan Darus 2014) Katalah $q(z)$ univalen dalam \mathbb{U} dan katalah $\theta(w)$ dan $\phi(w)$ analisis dalam mandala D mengandungi $q(\mathbb{U})$ dengan $\phi(w) \neq 0$ bila $w \in q(\mathbb{U})$. Pilih $Q(z) = zD_q(q(z))\phi(q(z))$, $h(z) = \theta(q(z) + Q(z))$ dan andaikan bahawa

1. $Q(z)$ adalah univalen bak-bintang dalam \mathbb{U} .
2. $Ny(zD_q(Q(z))/Q(z)) > 0, (z \in \mathbb{U})$.

Jika $p(z)$ analisis dalam \mathbb{U} , dengan $p(0) = q(0)$, $p(\mathbb{U}) \cup D$, dan

$$\theta(p(z)) + zD_q(q(z))\phi(q(z)) = h(z), \quad (4.8)$$

maka $p(z) \prec q(z)$ dan $q(z)$ adalah dominan terbaik.

Selain itu, turut diperlukan lema-lema berikut:

Lema 4.3.3. (Robertson 1985) Fungsi $(1-z)^\gamma \equiv e^{\gamma \log(1-z)}$, $\gamma \neq 0$, adalah setara dalam \mathbb{U} jika dan hanya jika γ sama ada berada dalam cakera tertutup $|\gamma-1| \leq 1$ atau $|\gamma+1| \leq 1$.

Katalah $P(\beta)$ kelas fungsi berbentuk $\phi(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots$ analisis dalam \mathbb{U} dan memenuhi ketaksamaan berikut:

$$N_y(\phi(z)) > \beta, \quad (0 \leq \beta < 1; z \in \mathbb{U}). \quad (4.9)$$

Lema 4.3.4. (Rao dan Saravanan 2002) Katalah $\phi_j \in P(\beta_j)$ diberikan (4.9), dengan $(0 \leq \beta_j < 1; j = 1, 2)$, maka

$$\phi_1 * \phi_2 \in P(\beta_3), \quad (\beta_3 = 1 - 2(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)), \quad (4.10)$$

dan batas β_3 adalah yang terbaik.

Lema 4.3.5. (Rao dan Chandrasekaran 1987) Katalah fungsi ϕ diberikan (4.9), berada dalam kelas $P(\beta)$. Maka

$$N_y \phi(z) > 2\beta - 1 \frac{2(1-\beta)}{1+|z|}, \quad (0 \leq \beta < 1) \quad (4.11)$$

4.4 KEPUTUSAN UTAMA SUBORDINASI PENGOPERASIAN PEMBEZA ANALOG- q POLILOGARITMA TERITLAK

Dalam bahagian ini dibincangkan hasil-hasil utama yang diperoleh dalam bentuk dan korolari dan pembuktiannya.

Teorem 4.4.1. *Andaikan $\lambda > 0, \alpha > 0$, dan $-1 \leq B < A \leq 1$. Jika $f \in A$, memenuhi*

$$(1 - \alpha) \frac{\mathfrak{P}_q^\lambda f(z)}{z} + \alpha \frac{\mathfrak{P}_q^{\lambda+1} f(z)}{z} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} = h(A, B; z) \quad (4.12)$$

maka

$$\text{Ny} \left(\left(\frac{\mathfrak{P}_q^\lambda f(z)}{z} \right)^{\frac{1}{n}} \right) > \left(\frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\left(\frac{1}{\alpha q}\right)-1} \left(\frac{1 - Au}{1 - Bu} \right) du \right)^{\frac{1}{n}}, n \geq 1, \quad (4.13)$$

dan keputusan yang diperoleh adalah tepat.

Bukti. Andaikan

$$g(z) = \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \quad (4.14)$$

untuk $f \in A$. Fungsi $g(z) = 1 + b_1 z + \dots$ untuk $f \in A$, analisis dalam \mathbb{U} . Menggunakan terbitan- q seperti dalam (4.5) pada (4.14), diperoleh

$$\begin{aligned} D_q(g(z)) &= D_q \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \right) \\ &= \frac{z D_q \left(\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z) \right) - \mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z \cdot qz} \\ &= \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z) - \mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{qz^2}. \end{aligned}$$

Oleh itu,

$$z D_q(g(z)) = \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z) - \mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{qz}.$$

Maka

$$\frac{z D_q(g(z))}{g(z)} = \frac{z}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z) - \mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{qz} = \frac{1}{q} \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} - 1 \right),$$

dan diperoleh,

$$\frac{qz D_q(g(z))}{g(z)} + 1 = \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} = \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{zg(z)}.$$

Dengan mendarabkan dengan $g(z)$,

$$\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{z} = qzD_q(g(z)) + g(z)$$

dan

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} + \alpha\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{z} &= (1-\alpha)p(z) + \alpha(qzD_q(g(z)) + g(z)) \\ &= g(z) + \alpha qzD_q(g(z)). \end{aligned}$$

Subordinasi pembeza (4.12) boleh ditulis berbentuk

$$g(z) + \alpha qzD_q(g(z)) \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$$

dan dengan menggunakan lema 4.3.1, diperoleh

$$g(z) \prec \frac{1}{\alpha q} z^{-\frac{1}{\alpha q}} \int_0^z \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha q}}} \frac{1-At}{1-Bt} dt$$

juga dengan menggunakan konsep subordinasi

$$\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} = \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q}-1} \frac{1+Au w(z)}{1+Bu w(z)} du$$

Dengan mempertimbangkan $-1 \leq \beta < A \leq 1$ dan menggunakan ketaksamaan $Ny(w^{\frac{1}{n}}) \geq (Ny w)^{\frac{1}{n}}$ untuk $Ny\{w\} > 0$ dan $n \geq 1$, diperoleh

$$Ny \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \right) > \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q}-1} \frac{1-Au}{1-Bu} du. \quad (4.15)$$

Oleh itu, ketaksamaan (4.13) secara langsung daripada (4.15).

Bagi pembuktian ketepatan hasil (4.13), ditakrifkan $f \in A$, oleh

$$\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} = \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q}-1} \frac{1+Au z}{1+Bu z} du.$$

Bagi fungsi ini, diperoleh

$$(1 - \alpha) \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} + \alpha \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{z} = \frac{1 + Az}{1 + Bz}$$

dan

$$\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \rightarrow \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q} - 1} \left(\frac{1 - Au}{1 - Bu} \right) du,$$

bila $z \rightarrow -1$. Dengan ini pembuktian telah lengkap.

Korolari 4.4.2. Katalah $\lambda, m \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$, $\alpha > 0$ dan $0 \leq \beta < 1$. Jika $f \in A$, memenuhi syarat subordinasi berikut

$$(1 - \alpha) \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} + \alpha \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{z} \prec \frac{(2\beta - 1)z + 1}{z + 1}, \quad (4.16)$$

maka

$$\text{Ny} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} > \left((2\beta - 1) + \frac{2(1 - \beta)}{\alpha q} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha q} - 1}}{1 + u} du \right)^{\frac{1}{n}}, n \geq 1.$$

Bukti.

Menggunakan langkah pembuktian seperti dalam Teorem 4.4.1 bagi $g(z) = \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z}$, subordinasi pembeza (4.16) ditulis

$$g(z) + \alpha q z D_q(g(z)) \prec \frac{(2\beta - 1)z + 1}{z + 1}.$$

Oleh itu,

$$\begin{aligned} \text{Ny} \left(\left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \right)^{\frac{1}{n}} \right) &> \left(\frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q} - 1} \left(\frac{1 + (2\beta - 1)u}{1 + u} \right) du \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q} - 1} \left((2\beta - 1) + \frac{2(1 - \beta)}{1 + u} \right) du \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left((2\beta - 1) + \frac{2(1 - \beta)}{\alpha q} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha q} - 1}}{1 + u} du \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Dengan itu kenyataan Korolari 4.16 adalah ditentusahkan.

Teorem 4.4.3. Katalah $0 \leq \rho \leq 1$ dan $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sehingga $\left| \frac{2(1-\rho)\gamma}{q} - 1 \right| \leq 1$ atau $\left| \frac{2(1-\rho)\gamma}{q} + 1 \right| \leq 1$. Jika $f \in A$ memenuhi syarat

$$\text{Ny} \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} \right) > \rho, \quad z \in \mathbb{U}$$

maka

$$\left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \right)^\gamma \prec (1-z)^{-\frac{2\gamma(1-\rho)}{q}}, \quad z \in \mathbb{U}$$

adalah dominan terbaik $(1-z)^{-\frac{2\gamma(1-\rho)}{q}}$.

Bukti. Dengan memilih $g(z) = \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \right)^\gamma$ dan menggunakan logaritma pembeza- q diperoleh

$$D_q(g(z)) = \gamma \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{z} \right)^{\gamma-1} \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z) - \mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)}{qz^2}$$

dan

$$\frac{zD_q(g(z))}{g(z)} = \frac{\gamma}{q} \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} - 1 \right).$$

Diperoleh,

$$\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} = 1 + \frac{qzD_q(g(z))}{\gamma g(z)}.$$

Hubungan $\text{Ny} \left(\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} \right) > \rho$ boleh ditulis berbentuk

$$\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f(z)}{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f(z)} \prec \frac{1 + (1-2\rho)z}{1-z},$$

yang setara dengan

$$1 + \frac{qzD_q(g(z))}{\gamma g(z)} \prec \frac{1 + (1-2\rho)z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (4.17)$$

Andaikan

$$u(z) = \frac{1}{(1-z)^{\frac{2(1-\rho)\gamma}{q}}} \quad \text{dan} \quad \phi(w) = \frac{q}{\gamma w}.$$

Didapati $u(z)$ adalah univalen daripada Lema 4.3.5. Dengan mudah dapat ditunjukkan

u, θ dan ϕ memenuhi syarat Lema (4.3.2).

Fungsi $Q(z) = zD_q(u(z))\phi(u(z)) = \frac{2(1-\rho)z}{1-z}$ adalah bak-bintang univalen dalam \mathbb{U} , dan $h(z) = \theta(Q(z) + u(z)) = \frac{1+(1-2\rho)z}{1-z}$.

Seterusnya, dapat ditunjukkan bahawa $q(z), \theta(z)$ dan $\phi(z)$ memenuhi syarat Lema 4.3.2. Diperhatikan bahawa

$$Q(z) = zD_q(q(z))\phi(q(z)) = \frac{1(1-\rho)z}{1-z}$$

ialah univalen bak bintang dalam \mathbb{U} dan

$$h(z) = \theta(q(z)) + Q(z) = \frac{1+(1-2\rho)z}{1-z}.$$

Dengan mengabungkan (4.17) dan Lema 4.3.2 diperoleh hasil dalam Teorem 4.4.3.

Teorem 4.4.4. *Katalah $\alpha < 1, -1 \leq B_k < A_k \leq 1$, dan $k = 1, 2$. Jika fungsi $f_k \in A$ adalah subordinasi pembeza*

$$(1-\alpha)\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f_k(z)}{z} + \alpha\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f_k(z)}{z} \prec \frac{1+A_k z}{1+B_k z}, \quad k = 1, 2, \quad (4.18)$$

maka

$$(1-\alpha)\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m (f_1 * f_2)(z)}{z} + \alpha\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} (f_1 * f_2)(z)}{z} \prec \frac{1+(1-2\gamma)z}{1+z},$$

dengan $*$ adalah hasil darab Hadamard bagi $f_1(z)$ dan $f_2(z)$, diperoleh

$$\gamma = 1 - \frac{4(A_1 - B_1)(A_2 - B_2)}{(1 - B_1)(1 - B_2)} \left(1 - \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha q}} - 1}{1 + u} du \right)$$

Bukti. Ambil $h_k(z) = (1-\alpha)\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f_k(z)}{z} + \alpha\frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} f_k(z)}{z}$. Subordinasi pembeza (4.18) boleh ditulis berbentuk $Ny(h_k(z)) > \frac{1-A_k}{1-B_k}, k = 1, 2$. Daripada pembuktian Teorem 4.4.1,

diperoleh

$$\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m f_k(z) = \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha q}-1} h_k(t) dt, k = 1, 2.$$

dan

$$\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m (f_1 * f_2)(z) = \frac{1}{\alpha q} z^{1-\frac{1}{\alpha q}} \int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha q}-1} h_0(t) dt,$$

dengan

$$\begin{aligned} h_0(z) &= (1-\alpha) \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^m (f_1 * f_2)(z)}{z} + \alpha \frac{\mathfrak{P}_{q,\lambda}^{m+1} (f_1 * f_2)(z)}{z} \\ &= \frac{1}{\alpha q} z^{1-\frac{1}{\alpha q}} \int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha q}-1} (h_1 * h_2)(t) dt. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lema 4.3.4, diperoleh $h_1 * h_2$ adalah fungsi analisis dalam \mathbb{U} ditulis $1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ yang memenuhi ketaksamaan $\text{Ny}(h_1 * h_2) > 1 - 2(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) = \beta$.

Daripada Lema 4.3.5 5, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Ny}(h_0(z)) &= \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q}-1} \text{Ny}(h_1 * h_2)(uz) du \\ &\geq \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q}-1} \left(2\beta - 1 + \frac{2(1-\beta)}{1+u|z|} \right) du. \end{aligned}$$

Oleh kerana $z \in \mathbb{U} \Rightarrow |z| < 1$ dan $\frac{2(1-\beta)}{1+u|z|} > \frac{2(1-\beta)}{1+u}$

$$\begin{aligned} &> \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha q}-1} \left(2\beta - 1 + \frac{2(1-\beta)}{1+u} \right) du \\ &= \frac{2\beta - 1}{\alpha q} \frac{u^{\frac{1}{\alpha q}}}{\frac{1}{\alpha q}} \Big|_0^1 + \frac{2(1-\beta)}{\alpha q} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha q}-1}}{1+u} du \\ &= 2\beta - 1 + \frac{2(1-\beta)}{\alpha q} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha q}-1}}{1+u} du \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} 2\beta - 1 &= 2 - 4(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) - 1 \\ &= 1 - 4 \left(1 - \frac{1 - A_1}{1 - B_1} \right) \left(1 - \frac{1 - A_2}{1 - B_2} \right) \\ &= 1 - \frac{4(A_1 - B_1)(A_2 - B_2)}{(1 - B_1)(1 - B_2)} \end{aligned}$$

dan

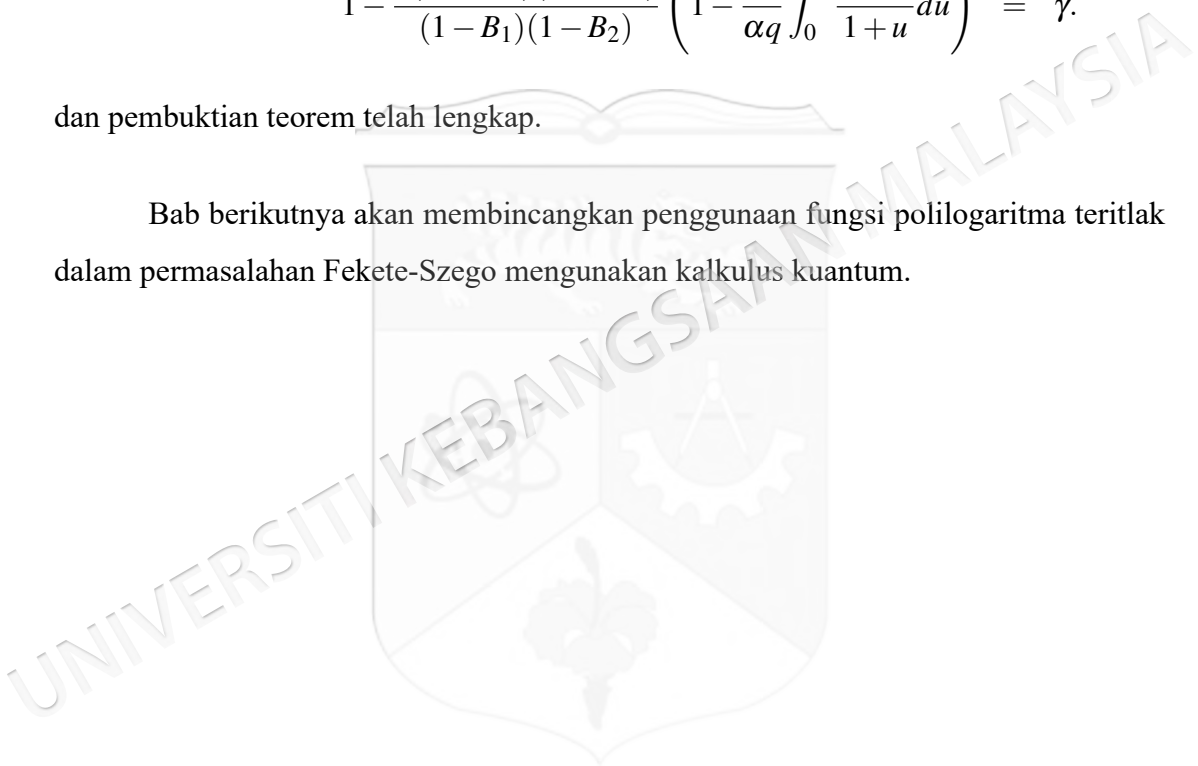
$$\begin{aligned} 2(1 - \beta) &= 2(1 - 1 + 2(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)) \\ &= \frac{4(A_1 - B_1)(A_2 - B_2)}{(1 - B_1)(1 - B_2)}. \end{aligned}$$

Seterusnya, diperoleh

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4(A_1 - B_1)(A_2 - B_2)}{(1 - B_1)(1 - B_2)} + \frac{4(A_1 - B_1)(A_2 - B_2)}{(1 - B_1)(1 - B_2)} \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha q} - 1}}{1 + u} du &= \\ 1 - \frac{4(A_1 - B_1)(A_2 - B_2)}{(1 - B_1)(1 - B_2)} \left(1 - \frac{1}{\alpha q} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{\alpha q} - 1}}{1 + u} du \right) &= \gamma. \end{aligned}$$

dan pembuktian teorem telah lengkap.

Bab berikutnya akan membincangkan penggunaan fungsi polilogaritma teritlak dalam permasalahan Fekete-Szego menggunakan kalkulus kuantum.



BAB V

PERMASALAHAN FEKETE-SZEGÖ SUBKELAS PENGOPERASIAN PEMBEZA POLILOGARITMA- Q TERITLAK

5.1 PENGENALAN

Dalam bab ini akan diperkenalkan pengoperasi baharu $\mathfrak{P}_{q,b,\lambda}^m$ analog- q bagi fungsi polilogaritma teritlak peringkat- m . Seterusnya fungsian Fekete-Szegö $|a_3 - \mu a_2^2|$ bagi subkelas bak-bintang- q $S_{q,b,\lambda}^*$ dan subkelas cembung- q $C_{q,b,\lambda}$ diperoleh.

5.2 ANALOG- Q FUNGSI POLILOGARITMA TERITLAK PERINGKAT KE- M

Takrif bagi pengitlakan fungsi Rieman Zeta dan Polilogaritma atau fungsi polilogaritma peringkat ke- m diberikan dalam (1.25).

Al-Shaqsi (2008) telah menerbitkan fungsi polilogaritma teritlak dengan mempertimbangkan fungsi $f \in A, m \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ dan $z \in \mathbb{U}$, ditakrifkan fungsi $G(m, b; z)$ dengan

$$G(m, b; z) = (1+b)^m \Phi_m(b; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+b}{n+b} \right)^m z^n. \quad (5.1)$$

Diperkenalkan fungsi $((G(m, b; z))^{(-1)})$ seperti berikut:

$$G(m, b; z) * ((G(m, b; z))^{(-1)}) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}, \quad (\lambda > -1, m \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-), \quad (5.2)$$

dan diperoleh pengoperasi linear berikut:

$$\mathfrak{P}_{b,\lambda}^m = ((G(m,b;z))^{(-1)} * f(z). \quad (5.3)$$

Dengan mengambil (2.4) dan (5.1) dalam (5.2), diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+b}{n+b} \right)^m z^n * ((G(m,b;z))^{(-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} z^n.$$

Oleh itu,

$$((G(m,b;z))^{(-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+b}{1+b} \right)^m \frac{(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} z^n. \quad (5.4)$$

Seterusnya ditakrifkan,

Takrif 5.2.1. Untuk $f \in A$ diberikan dalam (1.2)

$$\mathfrak{P}_{b,\lambda}^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+b}{1+b} \right)^m \frac{(n+\lambda-1)!}{\lambda!(n-1)!} a_n z^n \quad (5.5)$$

dengan $\lambda \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Jelas diperhatikan bahawa

$$\mathfrak{P}_{b,\lambda}^m \left(\mathfrak{P}_{b,\lambda}^k f(z) \right) = \mathfrak{P}_{b,\lambda}^{m+k} f(z), \quad (m, k \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-; z \in \mathbb{U}).$$

Berikut diberikan analog- q bagi pengoperasi yang ditakrifkan dalam (5.5).

Takrif 5.2.2. Ambil $f \in A$, dilambangkan $\mathfrak{P}_{q,b,\lambda}^m f(z)$ analog- q bagi pengoperasian fungsi polilogaritma teritlak ditakrifkan oleh

$$\mathfrak{P}_{q,b,\lambda}^m f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{[n+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m \frac{[n+\lambda-1]_q!}{[\lambda]_q! [n-1]_q!} a_n z^n, = z + \sum_{n=2}^{\infty} \Theta_{q,b,\lambda}^m a_n z^n, \quad (5.6)$$

yang

$$\Theta_{q,b,\lambda}^m = \left(\frac{[n+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m \frac{[n+\lambda-1]_q!}{[\lambda]_q! [n-1]_q!},$$

dengan $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $[a]_q$ dan $[a]_q!$ diberikan oleh (4.4).

Daripada Takrif 5.2.2, diperhatikan bahawa, jika $q \rightarrow 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \mathfrak{P}_{q,b,\lambda}^m f(z) &= z + \lim_{q \rightarrow 1} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{[n+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m \frac{[n+\lambda-1]_q!}{[\lambda]_q! [n-1]_q!} a_n z^n \right], \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{[n+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m \frac{[n+\lambda-1]_q!}{[\lambda]_q! [n-1]_q!} a_n z^n = \mathfrak{P}_{b,\lambda}^m f(z) \end{aligned}$$

dengan $\mathfrak{P}_{b,\lambda}^m f(z)$ ialah pengoperasian yang ditakrifkan dalam (5.5).

Dengan mengambil $q \rightarrow 1$ dan menggantikan nilai beberapa parameter ke dalam (5.6) diperoleh pengoperasian yang telah dikaji oleh pengkaji terdahulu. Untuk $m \in \mathbb{Z}, b = 1, \lambda = 0$ dan $q \rightarrow 1$, pengoperasi $\mathfrak{P}_{b,\lambda}^m$ ialah pengoperasi yang telah dikaji oleh Uralegaddi dan Somanatha (1991), dan untuk $m \in \mathbb{Z}, \lambda = 0$ dan $q \rightarrow 1$ berkait dengan pengoperasi yang dikaji oleh Flett (1972). Didapati juga, untuk $m = -1, \lambda = 0$ dan $q \rightarrow 1$ merupakan pengoperasi kamiran yang telah kaji oleh Owa dan Srivastava (1986). Dengan sebarang nombor tak negatif m dan $b = 1, \lambda = 0$ dan $q \rightarrow 1$ pengoperasi $\mathfrak{P}_{q,b,\lambda}^m$ adalah pengoperasi daripada kajian Jung, Kim dan Srivastava (1993), dan untuk integer tak negatif $m, n = \lambda = 0$ dan $q \rightarrow 1$, pengoperasi $\mathfrak{P}_{b,\lambda}^m$ ialah pengoperasi pembeza Salagean (1983). Didapati juga, untuk $m = 0, \lambda \in \mathbb{N}_0$ dan $q \rightarrow 1$, pengoperasi $\mathfrak{P}_{b,\lambda}^m$ ialah pengoperasi pembeza Ruscheweyh (1975). Juga diperoleh, untuk $m, \lambda \in \mathbb{N}_0, b = 0$ dan dan $q \rightarrow 1$ diperoleh pengoperasi pembeza Al-Shaqsi dan Darus (2008) seperti yang diberikan dalam (2.6).

5.3 FEKETE-SZEGO BAGI PENGOPERASIAN POLILOGARITMA-Q

Permasalahan Fekete-Szego telah memberi kesan yang kuat pada pengkaji bagi menyelesaikan permasalahan yang sama dalam kelas fungsi yang berbeza. Begitu juga dalam permasalahan melibat kalkulus quantum.

Aldweby dan Darus (2017) telah mendapatkan hasil bagi permasalahan

Fekete-Szegö melibatkan pengoperasian pembeza Ruscheweyh- q , dan dilanjutkan oleh Alsoboh dan Darus (2020). Dalam bahagian ini, akan diperoleh hasil bagi permasalahan Fekete-Szegö bagi pengoperasian polilogaritma teritlak- q bagi subkelas $S_{q,b,\lambda,m}^*(\varphi)$ dan $C_{q,b,\lambda,m}(\varphi)$.

Dimotivasikan daripada kajian oleh Aldweby dan Darus (2014) dan Alsoboh dan Darus (2020), kajian dalam bab ini adalah untuk mendapatkan fungsian Fekete-Szegö bagi pengoperasian fungsi polilogaritma teritlak analog- q seperti yang ditakrifkan dalam (5.6).

Dengan menggunakan prinsip subordinasi dan pembeza- q , ditakrifkan kelas bagi fungsi analisis bak-bintang- q dan cembung- q , seperti berikut:

Takrif 5.3.1. Untuk $\varphi \in P$ dan $\lambda > -1$, kelas $S_{q,b,\lambda,m}^*(\varphi)$ yang meliputi semua fungsi analisis $f \in A$ memenuhi

$$\frac{zD_q \left[\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z)) \right]}{\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z))} \prec \varphi(z), \quad |z| < 1, 0 < q < 1. \quad (5.7)$$

Takrif 5.3.2. Untuk $\varphi \in P$ dan $\lambda > -1$, kelas $C_{q,b,\lambda,m}(\varphi)$ yang meliputi semua fungsi analisis $f \in A$ memenuhi

$$1 + \frac{zqD_q \left[D_q \left[\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z)) \right] \right]}{D_q \left[\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z)) \right]} \prec \varphi(z), \quad |z| < 1, 0 < q < 1. \quad (5.8)$$

5.3.1 Hasil terdahulu permasalahan Fekete-Szegö

Bagi memperoleh hasil permasalahan bagi ketaksamaan Fekete-Szegö ini, diperlukan lema-lema berikut daripada Ma dan Minda (1992).

Lema 5.3.3. (Ma dan Minda 1992) Jika $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots \in P$ ialah bahagian nyata positif dalam \mathbb{U} dan $\mu \in \mathbb{C}$, maka

$$|c_2 - \mu c_1^2| \leq 2 \max\{1; |2\mu - 1|\}. \quad (5.9)$$

Hasil yang diperoleh adalah memenuhi persamaan berikut:

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{atau} \quad p(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}. \quad (5.10)$$

Lema 5.3.4. Jika $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots \in P$ ialah bahagian nyata positif dalam \mathbb{U} dan $\mu \in \mathbb{C}$, maka

$$|c_2 - \mu c_1^2| \leq \begin{cases} -4\mu + 2, & \text{jika } \mu \leq 0, \\ 2, & \text{jika } 0 \leq \mu \leq 1, \\ 4\mu - 2, & \text{jika } \mu \geq 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Dalam kajian ini, nilai q adalah nombor tetap $0 < q < 1$, $\mu \in \mathbb{C}$ dan $\varphi \in P$.

Kaedah bagi mendapatkan fungsian Fekete-Szegö bagi pengoperasian fungsi polilogaritma teritlak analog- q adalah dengan menggunakan pendekatan daripada Seoudy dan Aouf (2016), Aldweby (2017) dan Alsoboh dan Darus (2020).

5.3.2 Hasil utama Fekete-Szegö polilogaritma- q teritlak

Berikut diberikan hasil pekali ketaksamaan Fekete-Szegö bagi subkelas $S_{q,b,m/\lambda}^*(\varphi)$ dan $C_{q,b,m/\lambda}(\varphi)$.

Teorem 5.3.5. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 \neq 0)$, dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $S_{q,b,m,\lambda}^*(\varphi)$ dan μ ialah nombor kompleks, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1 [1 + b]_q^m [2]_q}{2 [3 + b]_q^m [\lambda + 2]_q [\lambda + 1]_q}$$

$$\text{maks} \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [1 + b]_q^m [3 + b]_q^m [\lambda + 2]_q}{2q^2 [2 + b]_q^{2m} [\lambda + 1]_q [2]_q} \right| \right\} \quad (5.12)$$

Bukti. Jika $f \in S_{q,n,\lambda,m}^*$, maka terdapat fungsi $w(z)$ dalam \mathbb{U} dengan $w(0) = 0$ dan $|w(z)| < 1$ dalam \mathbb{U} sehingga

$$\frac{zD_q \left[\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z)) \right]}{\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z))} = \varphi(w(z)). \quad (5.13)$$

Ditakrifkan fungsi $p(z)$ dengan $Ny(p(z)) > 0$ dan $p(0) = 1$, berbentuk

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} = 1 + p_1z + p_2z^2 + p_3z^3 + \dots \quad (5.14)$$

Oleh kerana $w(z)$ ialah fungsi Schwarz, maka

$$g(z) = \frac{zD_q \left[\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z)) \right]}{\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda}(f(z))} = 1 + d_1z + d_2z^2 + d_3z^3 + \dots \quad (5.15)$$

Daripada (5.6), terbitan- q memberikan

$$D_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right) = 1 + \left(\frac{[2 + b]_q}{[1 + b]_q} \right)^m [\lambda + 1]_q [2]_q a_2 z$$

$$+ \left(\frac{[3 + b]_q}{[1 + b]_q} \right)^m \frac{[\lambda + 2]_q [\lambda + 1]_q}{[2]_q} [3]_q a_3 z^2 + \dots \quad (5.16)$$

dan

$$zD_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right) = z + \left(\frac{[2 + b]_q}{[1 + b]_q} \right)^m [\lambda + 1]_q [2]_q a_2 z^2$$

$$+ \left(\frac{[3 + b]_q}{[1 + b]_q} \right)^m \frac{[\lambda + 2]_q [\lambda + 1]_q}{[2]_q} [3]_q a_3 z^3 + \dots \quad (5.17)$$

Seterusnya, daripada (5.13), (5.14) dan (5.15) diperoleh

$$g(z) = \varphi \left(\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \right). \quad (5.18)$$

Oleh kerana

$$\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} = \frac{1}{2} \left[p_1 z + \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) z^2 + \left(p_3 + \frac{p_1^3}{4} - p_1 p_2 \right) z^3 + \dots \right], \quad (5.19)$$

maka

$$\varphi \left(\frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \right) = 1 + \frac{1}{2} B_1 p_1 z + \left[\frac{1}{2} B_1 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4} B_2 p_1^2 \right] z^2 + \dots. \quad (5.20)$$

Daripada persamaan (5.20) dan (5.15), didapati

$$d_1 = \frac{1}{2} B_1 p_1, \quad (5.21)$$

$$d_2 = \frac{1}{2} B_1 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4} B_2 p_1^2. \quad (5.22)$$

Diketahui bahawa $[n]_q - 1 = q[n-1]_q$, justeru dari (5.15) memberikan

$$\frac{z D_q \mathfrak{D}_{b,q}^{m,\lambda} f(z)}{\mathfrak{D}_{b,q}^{m,\lambda} f(z)} = 1 + q[\lambda+1]_q a_2 z + \{ q[\lambda+1]_q [\lambda+2]_q a_3 - q[\lambda+1]_q^2 a_2^2 \} z^2 + \dots. \quad (5.23)$$

Diketahui bahawa $[n]_q - 1 = q[n-1]_q$ dan daripadad (5.20) diperoleh

$$\begin{aligned} d_1 &= q[\lambda+1]_q a_2 \\ d_2 &= q[\lambda+1]_q [\lambda+2]_q a_3 - q[\lambda+1]_q^2 a_2^2, \end{aligned} \quad (5.24)$$

atau kesetaraannya, diperoleh

$$a_2 = \frac{B_1 p_1}{2([2]_q - 1) \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m [\lambda+1]_q} = \frac{B_1 p_1 [1+b]_q^m}{2q[2+b]_q^m [\lambda+1]_q}, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{B_1}{2 \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m \frac{[\lambda+2]_q [\lambda+1]_q}{[2]_q} ([3]_q - 1)} \left\{ p_2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{B_2}{2B_1} + \frac{B_1}{2([2]_q - 1)} \right) p_1^2 \right\} \\ &= \frac{B_1 [1+b]_q^m [2]_q}{2[3+b]_q^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q ([3]_q - 1)} \left\{ p_2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{B_2}{2B_1} - \frac{B_1}{2q} \right) p_1^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Oleh itu,

$$\begin{aligned}
 a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{B_1[1+b]_q^m [2]_q}{2[3+b]_q^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q ([3]_q - 1)} \\
 &\quad \left\{ p_2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{B_2}{2B_1} - \frac{B_1}{2q} \right) p_1^2 \right\} - \mu \left(\frac{B_1 p_1 [1+b]_q^m}{2q[2+b]_q^m [\lambda+1]_q} \right)^2 \\
 &= \frac{B_1[1+b]_q^m [2]_q}{2[3+b]_q^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q ([3]_q - 1)} \left\{ p_2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{B_2}{2B_1} + \frac{B_1}{2q} - \mu \frac{B_1[1+b]_q^m [3+b]_q^m [\lambda+2]_q ([3]_q - 1)}{2q^2 [2+b]_q^{2m} [\lambda+1]_q [2]_q} \right) p_1^2 \right\} \\
 &= \frac{B_1[1+b]_q^m [2]_q}{2[3+b]_q^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q ([3]_q - 1)} \left\{ p_2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1[1+b]_q^m [3+b]_q^m [\lambda+2]_q ([3]_q - 1)}{2q^2 [2+b]_q^{2m} [\lambda+1]_q [2]_q} \right) p_1^2 \right\}. \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

dengan mempertimbangkan

$$v = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1[1+b]_q^m [3+b]_q^m [\lambda+2]_q ([3]_q - 1)}{2q^2 [2+b]_q^{2m} [\lambda+1]_q [2]_q} \right). \tag{5.29}$$

Ditulis

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1[1+b]_q^m [2]_q}{2[3+b]_q^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q ([3]_q - 1)} \{ p_2 - v p_1^2 \}.$$

Dengan menggunakan Lema 5.9 dalam (5.28) diperoleh hasil yang cari. Ini melengkapkan pembuktian .

Seterusnya, diberikan hasil bagi permasalahan Fekete-Szegö melibatkan subkelas $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$.

Teorem 5.3.6. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 \neq 0)$, dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$ dan μ ialah nombor kompleks, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \\ \text{maks} \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q}{2q[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q} \right| \right\}. \quad (5.30)$$

Bukti. Ambil $f \in C_{q,b,m,\lambda}$, maka terdapat fungsi Schwarz $w(z)$ dalam \mathbb{U} dengan $w(0) = 0$ dan $|w(z)| < 1$ dalam \mathbb{U} sehingga

$$1 + \frac{zqD_q \left(D_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right) \right)}{D_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right)} = \varphi(w(z)). \quad (5.31)$$

Daripada (5.6), terbitan- q memberikan

$$D_q \left(D_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right) \right) = \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m [\lambda+1]_q [2]_q a_2 \\ + \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q [3]_q a_3 z + \dots, \quad (5.32)$$

dan

$$zqD_q \left(D_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right) \right) = q \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m [\lambda+1]_q [2]_q a_2 z \\ + q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q} \right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q [3]_q a_3 z^2 + \dots \quad (5.33)$$

Seterusnya, daripada persamaan (5.14), (5.15) dan persamaan (5.31), dapat ditulis

$$1 + \frac{zqD_q \left(D_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right) \right)}{D_q \left(\mathfrak{P}_{b,q}^{m,\lambda} f(z) \right)} = 1 + \frac{1}{2} B_1 p_1 z + \left[\frac{1}{2} B_1 \left(p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4} B_2 p_1^2 \right] z^2 + \dots \quad (5.34)$$

Maka, daripada persamaan (5.34), diperoleh

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{B_1 p_1}{2q[2]_q \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+1]_q} = \frac{B_1 p_1 [1+b]_q^m}{2q[2]_q [2+b]_q^m [\lambda+1]_q}, \quad (5.35) \\
 a_3 &= \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \left\{ p_2 + \left[-\frac{1}{2} + \frac{B_2}{2B_1} + \frac{B_1}{2q} \right] p_1^2 \right\} \\
 &= \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \left\{ p_2 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} \right] p_1^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Oleh itu,

$$\begin{aligned}
 a_3 - \mu a_2^2 &= \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \\
 &\quad \left\{ p_2 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} \right] p_1^2 \right\} - \mu \left(\frac{B_1 p_1}{2q[2]_q \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+1]_q} \right)^2 \\
 &= \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \\
 &\quad \left\{ p_2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q}{2q[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q} \right) p_1^2 \right\}. \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B_1 [1+b]_q^m}{2q[3]_q [3+b]_q^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \\
 &\quad \left\{ p_2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [3+b]_q^m [3+b]_q^{2m} [\lambda+2]_q [3]_q}{q[2]_q^2 [1+b]_q^m [\lambda+1]_q} \right) p_1^2 \right\}. \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

dengan mengambil

$$v = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q}{2q[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q} \right). \quad (5.38)$$

Justeru, ditulis

$$a_3 - \mu a_2^2 = \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \{ p_2 - v p_1^2 \}.$$

Dengan menggunakan Lema (5.9) dalam (5.36) diperoleh hasil yang dicari. Ini melengkapkan pembuktian .

Dengan memilih $m = 0$ ke dalam Teorem 5.3.5 diperoleh korolari bagi kelas $S_q^*(\varphi)$ iaitu hasil daripada Aldweby dan Darus (2017) untuk pengoperasian Ruscheweyh- q seperti berikut:

Korolari 5.3.7. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 \neq 0)$, dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $S_{q,b,m/\lambda}^*(\varphi)$ dan μ ialah nombor kompleks, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1 [2]_q}{2[\lambda + 2]_q [\lambda + 1]_q} \text{maks} \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [\lambda + 2]_q}{2q^2 [\lambda + 1]_q [2]_q} \right| \right\}$$

Dengan mengambil $m = 0$ ke dalam Teorem 5.3.6 diperoleh korolari bagi kelas $C_q(\varphi)$ iaitu hasil daripada Aldweby dan Darus (2017) untuk pengoperasian Ruscheweyh- q seperti berikut:

Korolari 5.3.8. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 \neq 0)$, dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$ dan μ ialah nombor kompleks, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1}{2q[3]_q[\lambda + 2]_q[\lambda + 1]_q} \text{maks} \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [3]_q [\lambda + 2]_q}{2q[2]_q^2 [\lambda + 1]_q} \right| \right\}.$$

Untuk $m = 0, \lambda = 0$ dan dengan mengambil $q \rightarrow 1^-$ ke dalam Teorem 5.3.5 dan Teorem 5.3.6 , diperoleh korolari bagi kelas $S_q^*(\varphi)$ dan $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$ seperti berikut:

Korolari 5.3.9. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 \neq 0)$, dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $S_{q,b,m/\lambda}^*(\varphi)$ dan μ ialah nombor kompleks, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1}{2} \text{maks} \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - B_1 + \mu \frac{B_1}{2} \right| \right\}.$$

Korolari 5.3.10. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 \neq 0)$, dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$ dan μ ialah nombor kompleks, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1}{2} \text{maks} \left\{ 1; \left| \frac{B_2}{B_1} - B_1 + \mu \frac{B_1}{2} \right| \right\}.$$

Seterusnya, daripada Lema 5.3.4, diperoleh teorem-teorem berikut:

Teorem 5.3.11. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 > 0, B_2 \geq 0)$ dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $S_{q,b,m/\lambda}^*(\varphi)$, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} + \frac{B_1^2[1+b]_q^m[2]_q}{q[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \\ - \mu \frac{B_1^2[1+b]_q^{2m}}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q^2}; & \mu \leq \chi_1, \\ \frac{B_1[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)}; & \chi_1 \leq \mu \leq \chi_2, \\ \mu \frac{B_1^2[1+b]_q^{2m}}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q^2} - \frac{B_2[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \\ - \frac{B_1^2[1+b]_q^m[2]_q}{q[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)}; & \mu \geq \chi_2. \end{cases} \quad (5.39)$$

dengan

$$\chi_1 = \frac{\left(\frac{[2+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2}{\left(\frac{[3+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2} \left(\frac{q^2(B_1 + B_2) + qB_1^2}{q[2]_q B_1^2} \right),$$

$$\chi_2 = \frac{\left(\frac{[2+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2}{\left(\frac{[3+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2} \left(\frac{(B_2 - B_1)q^2 + qB_1^2}{q[2]_q B_1^2} \right).$$

Bukti. Dengan menggunakan Lema 5.3.4 dalam persamaan (5.28) dan (5.29), dipertimbangkan tiga kasus berikut:

kasus 1: Jika $\mu \leq \chi_1$

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &\leq \frac{B_1[1+b]_q^m[2]_q}{2[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \{2 - 4\nu\} \\ &= \frac{B_1[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \left\{ \frac{B_2}{B_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_1}{q} - \mu \frac{B_1[1+b]_q^m[3+b]_q^m[\lambda+2]_q([3]_q-1)}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q[2]_q} \right\}. \end{aligned}$$

Oleh itu,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_2[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} + \frac{B_1^2[1+b]_q^m[2]_q}{q[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} - \mu \frac{B_1^2[1+b]_q^{2m}}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q^2}. \quad (5.40)$$

kasus 2: Jika $\chi_1 \leq \mu \leq \chi_2$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)}. \quad (5.41)$$

kasus 3: Jika $\mu \geq \chi_2$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1[1+b]_q^m[2]_q}{2[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \{4\nu - 2\} = \frac{B_1[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \left\{ \frac{B_2}{B_1} + \frac{B_1}{q} - \mu \frac{B_1[1+b]_q^m[3+b]_q^m[\lambda+2]_q([3]_q-1)}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q[2]_q} \right\}.$$

Oleh itu,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \mu \frac{B_1^2[1+b]_q^{2m}}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q^2} - \frac{B_2[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} - \frac{B_1^2[1+b]_q^m[2]_q}{q[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)}. \quad (5.42)$$

Dengan ini pembuktian telah lengkap.

Teorem 5.3.12. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $B_1 > 0, B_2 \geq 0$ dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} + \frac{B_1^2[1+b]_q^m[2]_q}{q[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \\ - \mu \frac{B_1^2[1+b]_q^{2m}}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q^2}; & \mu \leq \xi_1, \\ \frac{B_1[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)}; & \xi_1 \leq \mu \leq \xi_2, \\ \mu \frac{B_1^2[1+b]_q^{2m}}{2q^2[2+b]_q^{2m}[\lambda+1]_q^2} - \frac{B_2[1+b]_q^m[2]_q}{[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)} \\ - \frac{B_1^2[1+b]_q^m[2]_q}{q[3+b]_q^m[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q([3]_q-1)}; & \mu \geq \xi_2. \end{cases} \quad (5.43)$$

dengan

$$\xi_1 = \frac{\left([2]_q^2 q \frac{[2+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2 (B_1^2 + (B_2 - B_1)q)}{q[3]_q[2]_q \left(\frac{[3+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2 B_1^2},$$

$$\xi_2 = \frac{\left([2]_q^2 q \frac{[2+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2 (B_1^2 + (B_2 - B_1)q)}{q[3]_q[2]_q \left(\frac{[3+b]_q^m}{[1+b]_q^m}\right)^2 B_1^2}.$$

Bukti. Dengan menggunakan Lema 5.3.4 ke dalam persamaan (5.36) dan (5.38), dipertimbangkan tiga kasus berikut: kasus 1: Jika $\mu \leq \xi_1$

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &\leq \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} \{2 - 4\nu\} \\ &= \frac{B_1}{q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} \left\{ \frac{B_2}{B_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_1}{q} - \mu \frac{B_1[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q}{2q[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q} \right\}. \end{aligned}$$

Oleh itu,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_2}{q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} + \frac{B_1^2}{q^2[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} - \mu \frac{B_1^2}{2q^2[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q^2}. \quad (5.44)$$

kasus 2: Jika $\xi_1 \leq \mu \leq \xi_2$

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{B_1}{q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q}. \quad (5.45)$$

kasus 3: Jika $\mu \geq \xi_2$

$$\begin{aligned} |a_3 - \mu a_2^2| &\leq \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \{4\nu - 2\} \\ &= \frac{B_1}{q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \left\{ \frac{B_2}{B_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_1}{q} - \mu \frac{B_1[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q}{2q[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q} \right\}. \end{aligned}$$

Oleh itu,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \mu \frac{B_1^2}{2q^2[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q^2} - \frac{B_2}{q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} - \frac{B_1^2}{q^2[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q}. \quad (5.46)$$

Seterusnya, diperoleh

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{B_1}{2q[3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q [\lambda+1]_q} \left\{ p_2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q}{2q[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q} \right) p_1^2 \right\}. \quad (5.47)$$

dengan mengambil

$$v = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1}{q} + \mu \frac{B_1 [3]_q \left(\frac{[3+b]_q}{[1+b]_q}\right)^m [\lambda+2]_q}{2q[2]_q^2 \left(\frac{[2+b]_q}{[1+b]_q}\right)^{2m} [\lambda+1]_q} \right). \quad (5.48)$$

Jika dipilih nilai $m = 0$, diperoleh ketaksamaan Fekete-Szegő bagi subkelas $S_q^*(\varphi)$ dan $C_q(\varphi)$ masing-masing seperti yang ditunjukkan Aldweby dan Darus (2017).

Korolari 5.3.13. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $(B_1 > 0, B_2 \geq 0)$ dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $S_{q,b,m,\lambda}^*(\varphi)$, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2}{q[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} + \frac{B_1^2}{q^2[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} - \mu \frac{B_1^2}{2q^2[\lambda+1]_q^2}; & \mu \leq \chi_1, \\ \frac{B_1}{q[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q}; & \chi_1 \leq \mu \leq \chi_2, \\ \mu \frac{B_1^2}{2q^2[\lambda+1]_q^2} - \frac{B_2}{q[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} - \frac{B_1^2}{q^2[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q}; & \mu \geq \chi_2. \end{cases} \quad (5.49)$$

dengan

$$\chi_1 = \frac{q^2(B_1 + B_2) + qB_1^2}{q[2]_q B_1^2}$$

dan

$$\chi_2 = \frac{(B_2 - B_1)q^2 + qB_1^2}{q[2]_q B_1^2}.$$

Korolari 5.3.14. *Andaikan $\varphi(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$ dengan $B_1 > 0, B_2 \geq 0$ dan f diberikan oleh (1.2) berada dalam $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$, maka*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{B_2}{q[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} + \frac{B_1^2}{q^2[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} - \mu \frac{B_1^2}{2q^2[\lambda+1]_q^2}; & \mu \leq \xi_1, \\ \frac{B_1}{q[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q}; & \xi_1 \leq \mu \leq \xi_2, \\ \mu \frac{B_1^2}{2q^2[\lambda+1]_q^2} - \frac{B_2}{q[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q} - \frac{B_1^2}{q^2[\lambda+2]_q[\lambda+1]_q}; & \mu \geq \xi_2. \end{cases} \quad (5.50)$$

dengan

$$\xi_1 = \frac{(B_1^2 + (B_2 - B_1)q)}{q[3]_q[2]_q B_1^2}$$

dan

$$\xi_2 = \frac{(B_1^2 + (B_2 - B_1)q)}{q[3]_q[2]_q B_1^2}.$$

Telah ditunjukkan beberapa hasil daripada permasalahan ketaksamaan Fekete-Szegö menggunakan pengoperasian polilogaritma- q teritlak dalam subkelas $S_{q,b,m,\lambda}^*(\varphi)$ dan $C_{q,b,m,\lambda}(\varphi)$.

Dalam bab seterusnya, kajian beralih ke kelas fungsi melibatkan fungsi-fungsi istimewa lain.

BAB VI

ANGGARAN PEKALI SUBKELAS FUNGSI YANG ANALISIS DAN BI-UNIVALEN

6.1 PENDAHULUAN

Kajian bagi mendapatkan sempadan pekali bagi fungsi analisis dan bi-univalen telah menarik minat ramai penyelidik. Mereka telah memperkenalkan banyak fungsi kelas baharu dengan menggabungkan pelbagai jenis kelas dan dengan fungsi istimewa seperti fungsi Mittag-Leffler, Fungsi Faber, Fungsi Poisson, Fungsi Gamma dan banyak lagi. Dengan menggunakan pendekatan yang sama, diperoleh subkelas baharu melibatkan kelas fungsi analisis bi-univalen disekutu dengan fungsi polinomial Faber dan fungsi Fox-Wright teritlak.

Antara pengkaji dalam topik melibatkan subkelas fungsi yang analisis dan bi-univalen ialah Srivastava, Mishra & Gochhayat (2010), Ali et al. (2012), Caglar, Orhan dan Yagmur (2013), Obradovic dan Ponnusamy (2013), Ul-Haq, Nazneen dan Rahman (2014), Altinkaya dan Yalcin (2016) juga Bohra dan Ravichandran (2017).

Lewin (1967) adalah yang pertama memperkenalkan dan mengkaji kelas bagi fungsi analisis bi-univalen, dengan membuktikan bahawa nilai $|a_2| < 1.51$. Seterusnya hasil yang diperoleh oleh Lewin ini ditambahbaik oleh Brannan dan Clunie (1980) yang memperoleh $|a_2| < \sqrt{2}$. Netanyahu (1969) pula memperoleh nilai $|a_2| < \frac{4}{3}$. Kajian ini diteruskan lagi oleh Brannan dan Taha (1985) yang mengkaji subkelas tertentu bagi fungsi bi-univalen dalam mendapatkan anggaran tidak tepat bagi dua pekali pertama Taylor-Maclaurin iaitu $|a_2|$ dan $|a_3|$.

6.2 FUNGSI BI-UNIVALEN

Diketahui bahawa setiap fungsi $f \in S$ dalam bentuk (1.2) mempunyai songsangan f^{-1} ditakrifkan oleh

$$f^{-1}(f(z)) = z, (z \in \mathbb{U}) \quad \text{dan} \quad f^{-1}(f(w)) = w, \quad (|w| < r, r \geq 1/4).$$

Fungsi songsangan $g = f^{-1}$ diberikan oleh

$$g(w) = f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3) w^3 - (5a_3^2 - 5a_2 a_3 + a_4) w^4 + \dots = w + \sum_{n=2}^{\infty} A_n w^n. \quad (6.1)$$

Fungsi $f \in A$ adalah bi-univalen dalam \mathbb{U} jika kedua-dua f dan f^{-1} adalah univalen dalam \mathbb{U} . Misalkan Σ melambangkan kelas bagi fungsi bi-univalen dalam \mathbb{U} yang diberikan oleh (1.2). Srivistava, Mishra dan Gochhayat (2010) telah menceritakan sejarah dan juga contoh menarik bagi kelas Σ dalam kertas kerja mereka.

Brannan dan Taha (1988) telah memperkenalkan subkelas bagi fungsi bi-univalen untuk kelas Σ yang seakan sama dengan subkelas fungsi bak-bintang, $S^*(\alpha)$ dan fungsi cembung $K(\alpha)$ peringkat α ($0 < \alpha \leq 1$). Kajian ini akan memperkenalkan subkelas baharu bagi fungsi kelas Σ dan mendapatkan anggaran bagi pekali $|a_2|$ dan $|a_3|$ menggunakan pendekatan teknik daripada Srivistava, Mishra dan Gochhayat (2010).

6.3 ANGGARAN PEKALI FUNGSI SUBKELAS ANALISIS DAN BI-UNIVALEN MELIBATKAN FUNGSI FOX-WRIGHT TERITLAK DAN POLINOMIAL FABER

Pada tahun 1903, Faber memperkenalkan polinomial Faber dan Wright pada tahun 1935 telah memperkenalkan fungsi Fox-Wright (Wright 1935). Fungsi-fungsi ini memainkan peranan penting dalam bidang sains matematik.

Kajian bagi mendapatkan pekali batas umum bagi fungsi bi-univalen melibatkan Faber polinomial telah dilakukan oleh ramai pengkaji.

Jahangiri dan Hamidi (2013) telah mengkaji anggaran pekali bagi kelas bagi fungsi analisis bi-univalen dan Hamidi dan Jahangiri (2014) seterusnya mengkaji kelas bagi fungsi analisis bi-univalen hampir cembung melibatkan Faber polinomial. Kajian melibatkan Faber polinomial turut dilakukan pada kelas yang ditakrifkan oleh Frasin dan Aouf (2011). Seterusnya, Bulut (2014) telah mengitlakkan hasil oleh Jahangiri dan Hamidi (2013). Bulut (2016) pula mengitlakkan dan menambahbaik keputusan yang diperoleh Subramaniam, Shanmugam dan Sivakumar (2016), Frasin dan Aouf (2011) dan Srivastava, Eker dan Ali (2015).

6.3.1 Subkelas fungsi polilogaritma dan Fox-Wright teritlak

Dalam (2.5), telah ditunjukkan bagaimana fungsi polilogaritma teritlak diperoleh dan diberikan seperti berikut

$$(G(m; z))^{(-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^m \frac{(n + \lambda - 1)!}{\lambda!(n-1)!} z^n, (z \in \mathbb{U}),$$

dengan $m, \lambda \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, z \in \mathbb{U}$.

Seterusnya, dipertimbangkan parameter kompleks berikut bagi memperoleh fungsi Fox-Wright teritlak.

$$\alpha_1, \dots, \alpha_q; \left(\frac{\alpha_m}{A_m} \neq 0, -1, -2, \dots; m = 1, \dots, q \right)$$

dan

$$\beta_1, \dots, \beta_s; \left(\frac{\beta_m}{B_m} \neq 0, -1, -2, \dots; m = 1, \dots, s \right).$$

Pengitlakan fungsi Fox-Wright ${}_q\Psi_s$ bagi fungsi hipergeometrik ${}_qF_s$ ditakrifkan oleh Wright (1935) sebagai

$$\begin{aligned} {}_q\Psi_s(z) &= {}_q\Psi_s [(\alpha_1, A_1), \dots, (\alpha_q, A_q); (\beta_1, B_1), \dots, (\beta_s, B_s); z] \\ &= {}_q\Psi_s [(\alpha_j, A_m)_{1,q}, (\beta_m, B_m)_{1,s}; z] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \prod_j^q \Gamma(\alpha_m + A_m n) \right\} \left\{ \prod_m^s \Gamma(\beta_m + B_m n) \right\}^{-1} \frac{z^n}{n!}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

dengan pekali $A_m(m = 1, \dots, q)$ dan $B_m(m = 1, \dots, s)$ adalah nombor nyata positif sehingga $1 + \sum_{m=1}^s B_m - \sum_{m=1}^q A_m \geq 0$ bagi nilai yang sesuai untuk $|z|$. Fungsi ${}_q\Psi_s[z]$ diturunkan ke fungsi hipergeometrik teritlak ${}_qF_s[z]$ bila $A_m(m = 1, \dots, q)$ dan $B_m(m = 1, \dots, s)$ dalam (6.2).

Ditulis,

$${}_qF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_s; z) \equiv \omega {}_q\Psi_s [(\alpha_1, 1)_{1,q}; (\beta_1, 1)_{1,s}; z], \quad (6.3)$$

dengan $(q \leq s + 1; q, s \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{N} \cup \{0\}; z \in \mathbb{U})$ dan $\omega := \frac{\Gamma(\beta_1) \cdots \Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_q)}$.

Misalkan $\Lambda(z) = f(z) * {}_q\Psi_s$, diperoleh

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= z + {}_q\Psi_s [(\alpha_1, 1)_{1,q}; (\beta_1, 1)_{1,s}; z]_{m \text{ times}} * \cdots * {}_q\Psi_s [(\alpha_1, 1)_{1,q}; (\beta_1, 1)_{1,s}; z] \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{\prod_{m=1}^q \Gamma(\alpha_m + A_m(n-1))}{\prod_{m=1}^s \Gamma(\beta_m + B_m(n-1))} \right) \left(\frac{1}{(n-1)!} \right) \right] z^n. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan hasil darab Hadamard (konvolusi) di antara fungsi polilogaritma teritlak yang ditakrifkan oleh Al-Shaqsi dan Darus (2008) dan fungsi Fox-Wright teritlak oleh Wright (1935), diperoleh pengoperasi baharu melibatkan fungsi polilogaritma teritlak dan fungsi Fox-Wright teritlak yang ditakrifkan seperti berikut:

Takrif 6.3.1. *Andaikan $f \in A$, dan $I_{m,n}^\mu(\alpha_1, \beta_1)f(z) : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ dengan $I_{m,n}^\mu(\alpha_1, \beta_1)f(z) = \Lambda(z) * (G(m; z))^{(-1)}$. Fungsi Fox-Wright dan polilogaritma teritlak diberikan oleh*

$$I_{m,n}^\mu f(z) = \Lambda(z) * (G(m; z))^{(-1)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_n^m \Theta_n^\mu a_n z^n, \quad (6.4)$$

yang

$$\Omega_n^m = \left[\left(\frac{\prod_{m=1}^q \Gamma(\beta_m + B_m(n-1))}{\prod_{m=1}^s \Gamma(\alpha_m + A_m(n-1))} \right) \left(\frac{1}{(n-1)!} \right) \right] \quad (6.5)$$

dan

$$\Theta_n^\mu = \left[\frac{(n-1)^n (n+\mu-2)!}{\lambda! (n-2)!} \right], m \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \cup \{0\}, n \geq 2, \mu \geq 0. \quad (6.6)$$

Seterusnya, diperkenalkan subkelas $H_{\Sigma}(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^\mu)$ ditakrifkan seperti

berikut:

Takrif 6.3.2. For $\lambda \geq 1$ dan $\delta \geq 0$, fungsi $f \in \Sigma$ diberikan oleh (1.2) dan $I_{m,n}^\mu f(z)$ diberikan oleh (6.3.1) dikatakan dalam kelas $H_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^\mu)$ jika syarat-syarat berikut dipenuhi:

$$\text{Ny} \left\{ (1 - \lambda) \frac{I_{m,n}^\mu f(z)}{z} + \lambda (I_{m,n}^\mu f(z))' + \delta z (I_{m,n}^\mu f(z))'' \right\} > \alpha \quad (6.7)$$

dan

$$\text{Ny} \left\{ (1 - \lambda) \frac{I_{m,n}^\mu g(w)}{z} + \lambda (I_{m,n}^\mu g(w))' + \delta z (I_{m,n}^\mu g(w))'' \right\} > \alpha, \quad (6.8)$$

dengan $0 \leq \alpha < 1; j \in \mathbb{Z}_0, w \in \mathbb{U}; g = f^{-1}$ diberi oleh (6.1).

Didapati bahawa $H_\Sigma(\alpha, \lambda, 0; 1, 1) = B_\Sigma(\alpha, \lambda)$, subkelas yang diperkenalkan oleh Frasin dan Aouf (2011). Srivastava, Mishra dan Gochhayat (2010) telah membincangkan fungsi bi-univalen $H_\Sigma(\alpha, 0, 0; 1, 1) = H_\Sigma(\alpha)$. Bulut (2016) telah memperoleh anggaran pekali bagi subkelas yang ditakrifkan oleh $H_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta; 1, 1) = N_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta)$.

6.3.2 Hasil utama anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-Univalen melibatkan polilogaritma dan Fox-Wright teritlak dengan polinomial Faber

Sebelum mendapatkan hasil utama, dinyatakan dahulu lema dan takrifan berikut.

Misalkan P kelas bagi semua fungsi, dan $p(z)$ analisis dalam \mathbb{U} yang mana $\text{Ny} \{p(z)\} > 0$ dengan $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$ untuk $z \in \mathbb{U}$.

Lema 6.3.3. (Duren 1983). Misalkan $p \in P$ analisis dalam \mathbb{U} diberikan oleh $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$ dan $\text{Ny} \{p(z)\} > 0$ untuk $z \in \mathbb{U}$. Maka

$$|c_n| \leq 2, \quad (n \geq 1). \quad (6.9)$$

Airault dan Bouali (2006) memberikan fungsi kembangan polinomial Faber $f \in$

A dalam bentuk (1.2) dan pekali bagi pemetaan songsang $g = f^{-1}$ ditunjukkan oleh

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2, a_3, \dots) w^n, \quad (6.10)$$

yang

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{-n} &= \frac{(-n)!}{(-2n+1)!(n-1)!} a_2^{n-1} + \frac{(-n)!}{2(-n+1)!(n-3)!} a_2^{n-3} a_3 \\ &+ \frac{(-n)!}{(-2n+3)!(n-4)!} a_2^{n-4} a_4 + \frac{(-n)!}{2(-n+2)!(n-5)!} a_2^{n-5} [a_5 + (-n+2)a_3^2] \\ &+ \frac{(-n)!}{(-2n+5)!(n-6)!} a_2^{n-6} [a_6 + (-2n+5)a_3 a_4] + \dots, \end{aligned} \quad (6.11)$$

Tiga sebutan pertama bagi K_{n-1}^{-n} dalam (6.11) adalah

$$K_1^{-2} = -2a_2, K_2^{-3} = 3(2a_2^2 - a_3) \quad \text{dan} \quad K_3^{-4} = -4(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4). \quad (6.12)$$

Secara umumnya, bagi setiap $p \in P$, kembangan bagi K_n^p ialah

$$D_n^p = p a_n + \frac{p(p-1)}{2} D_n^2 + \frac{p!}{(p-3)!3!} D_n^3 + \dots + \frac{p!}{(p-n)!n!} D_n^n, \quad (6.13)$$

yang $D_n^p = D_n^p(a_2, a_3, \dots)$.

Todorov (1991) telah memberikan

$$D_n^m = D_n^p(a_2, a_3, \dots, a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!}{i_1! \dots i_n!} a_1^{i_1}, \dots, a_n^{i_n}$$

sementara $a_1 = 1$ dan hasil tambah diambil alih semua integer bukan negatif i_1, \dots, i_n memenuhi

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = m \quad \text{dan} \quad i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n = n.$$

Adalah jelas bahawa $D_n^n(a_1, a_2, a_3, \dots) = a_1^n$. Ini mengakibatkan, fungsi $H_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^\mu)$ dalam bentuk (1.2) boleh ditulis

$$(1 - \lambda) \frac{I_{m,n}^\mu f(z)}{z} + \lambda (I_{m,n}^\mu f(z))' + \delta z (I_{m,n}^\mu f(z))'' = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n) z^{n-1} \quad (6.14)$$

yang

$$F_1 = (1 + \lambda + 2\delta) \Omega_2^m \Theta_2^\mu a_2, F_2 = (1 + 2\lambda + 6\delta) \Omega_3^m \Theta_3^\mu a_3 \quad \text{dan} \quad F_3 = (1 + 3\lambda + 12\delta) \Omega_4^m \Theta_4^\mu a_4.$$

Umumnya, diperoleh

$$F_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) = (1 + (n-1)\lambda + n(n-1)\delta) \Omega_n^m \Theta_n^\mu a_n. \quad (6.15)$$

Teorem berikutnya diperkenalkan melibatkan batas atas untuk pekali $|a_n|$ bagi fungsi analisis bi-univalen dalam kelas $H_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^\mu)$.

Teorem 6.3.4. *Bagi $\lambda \geq 1, \delta \geq 0, 0 \leq \alpha < 1$, dan $m \in \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \cup \{0\}, \mu \geq 0$. Andaikan fungsi $f \in H_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^\mu)$ diberikan oleh (1.2). Jika $a_k = 0 (2 \leq k \leq n-1)$, maka*

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{[1 + (n-1)\lambda + n(n-1)\delta] \Omega_n^m \Theta_n^\mu} \quad (n \geq 4).$$

dengan Ω_n^m dan Θ_n^μ seperti dalam persamaan (6.5) dan (6.6).

Bukti. Bagi fungsi $H_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^\mu)$ dalam bentuk (1.2), diperoleh kembangan (6.14) dan bagi pemetaan songsang $g = f^{-1}$. Dipertimbangkan (6.1), diperoleh

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda) \frac{I_{m,n}^\mu g(w)}{w} + \lambda (I_{m,n}^\mu g(w))' + \delta w (I_{m,n}^\mu g(w))'' \\ & = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} [1 + (n-1)\alpha + n(n-1)\lambda] A_n w^{n-1} \Omega_n^m \Theta_n^\mu, \end{aligned} \quad (6.16)$$

dengan $A_n = \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Bagi pembuktian Teorem 6.3.4, dipertimbangkan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ and $I_{m,n}^\mu f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_n^m \Theta_n^\mu a_n z^n$. Sama juga bagi $g = f^{-1}$, diambil

$$g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} a_n w^n \text{ and } I_{m,n}^{\mu} g(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_n^m \Theta_n^{\mu} a_n w^n.$$

Oleh kerana $f \in H_{\Sigma}(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^{\mu})$ dan $g = f^{-1} \in H_{\Sigma}(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^{\mu})$, daripada takrifan, terdapat dua fungsi bahagian nyata positif

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in A \quad \text{dan} \quad q(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n \in A,$$

yang mana $Ny \{p(z)\} > 0$ dan $Ny \{q(w)\} > 0$ dalam \mathbb{U} .

Pertama sekali, dengan menggunakan bahagian positif bagi $p(z)$ dan $q(w)$, diperoleh

$$\begin{aligned} (1-\lambda) \frac{I_{m,n}^{\mu} f(z)}{z} + \lambda (I_{m,n}^{\mu} f(z))' + \delta z (I_{m,n}^{\mu} f(z))'' \\ = 1 + (1-\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) z^n \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$= \alpha + (1-\alpha)p(z) \quad (6.18)$$

dan

$$\begin{aligned} (1-\lambda) \frac{I_{m,n}^{\mu} g(w)}{w} + \lambda (I_{m,n}^{\mu} g(w))' + \delta w (I_{m,n}^{\mu} g(w))'' \\ = 1 + (1-\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n) z^n. \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$= \alpha + (1-\alpha)q(w) \quad (6.20)$$

Seterusnya, dengan membandingkan pekali-pekali antara (6.14) dengan (6.17) dan (6.18) diperoleh

$$[1 - (n-1)\lambda + n(n-1)\delta] \Omega_n^m \Theta_n^{\mu} = 1 + (1-\alpha) K_n^1(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}) \quad (6.21)$$

dan dengan cara yang sama, dengan membandingkan pekali-pekali antara (6.17) dengan (6.20) dan (6.19), diperoleh

$$-[1 - (n-1)\lambda + n(n-1)\delta] \Omega_n^m \Theta_n^{\mu} = 1 + (1-\alpha) K_n^1(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}) \quad (6.22)$$

yang $A_n = -a_n$ for $a_k = 0 (2 \leq k \leq n-1)$. Justeru,

$$[1 - (n-1)\lambda + n(n-1)\delta]\Omega_n^m \Theta_n^\mu = (1-\alpha)c_{n-1} \quad (6.23)$$

dan

$$-[1 - (n-1)\lambda + n(n-1)\delta]\Omega_n^m \Theta_n^\mu = (1-\alpha)d_{n-1}. \quad (6.24)$$

Maka, dengan menggunakan ketaksamaan nilai mutlak, diperoleh

$$|a_n| = \left| \frac{|c_{n-1}|(1-\alpha)}{[1 - (n-1)\lambda + n(n-1)\delta]\Omega_n^m \Theta_n^\mu} \right| = \left| \frac{|d_{n-1}|(1-\alpha)}{[1 - (n-1)\lambda + n(n-1)\delta]\Omega_n^m \Theta_n^\mu} \right|. \quad (6.25)$$

Akhir sekali, daripada Lema 3.5, $|c_{n-1}| = |d_{n-1}|$, diperoleh

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{[1 - (n-1)\lambda + n(n-1)\delta]\Omega_n^m \Theta_n^\mu}, (n \geq 4). \quad (6.26)$$

Ini melengkapkan bukti bagi Teorem 6.3.4.

Disetkan nilai-nilai bagi $\alpha, \lambda, \sigma, \Theta$ dan Ω , diperoleh dapatan berikut seperti yang telah diperoleh pengkaji awal Bagi $\lambda \geq 1, \delta \geq 0, 0 \leq \alpha < 1$ dan $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \mu \geq 0$. Andaikan $f \in H_\Sigma(\alpha, \lambda, \delta; \Omega_n^m, \Theta_n^\mu)$ suatu fungsi yang diberikan oleh (1.2).

Untuk nilai $a_k = 0; (2 \leq k < n-1)$, jika memilih $\Omega_n^m = 1$ dan $\Theta_n^\mu = 1$, diperoleh keputusan kajian daripada Bulut (2016). Dengan memilih $\delta = 0, \Omega_n^m = 1$ dan $\Theta_n^\mu = 1$, diperoleh hasil kajian Jahangiri dan Hamidi (2013). Manakala, jika memilih $\delta = 0, \lambda = 1, \Omega_n^m = 1$ dan $\Theta_n^\mu = 1$, diperoleh hasil kajian daripada Srivastava, Mishra dan Gochhayat (2010) dan dengan memilih $\lambda = 1, \Omega_n^m = 1$ dan $\Theta_n^\mu = 1$ serta $\Theta_n^\mu = 1$, diperoleh hasil kajian daripada Srivastava, Eker dan Ali (2015).

6.4 ANGGARAN PEKALI FUNGSI SUBKELAS ANALISIS DAN BI-UNIVALEN MELIBATKAN FUNGSI FOX-WRIGHT TERITLAK DAN KUROKI-OWA

Dalam bahagian ini, kajian akan mendapatkan anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-Univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki-Owa.

Seperti yang diberikan dalam Takrif 1.3.7, suatu fungsi $f \in A$ dikatakan bak-bintang jika memenuhi syarat $Ny \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$ dan dilambangi dengan $S^*(\alpha)$. Manakala dilambangkan $M(\beta)$ merupakan subkelas bagi fungsi $f(z)$ yang memenuhi ketaksamaan $Ny \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < \beta, (z \in \mathbb{U})$ bagi $\beta > 1$. Tambahan pula, subkelas $S^*(\alpha, \beta) \subset A$ yang mana memenuhi ketaksamaan berikut

$$\alpha < Ny \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < \beta, \quad (0 \leq \alpha < 1 < \beta; z \in \mathbb{U}). \quad (6.27)$$

Fungsi kelas $S^*(\alpha)$ dan $M(\beta)$ telah dikaji oleh Uralegaddi, Ganigi dan Sarangi (1991) dan Kuroki dan Owa (2012).

Sekarang, daripada takrif (7.2.3), diperkenalkan subkelas baharu seperti berikut

Takrif 6.4.1. *Andaikan λ, α dan β nombor nyata yang $\lambda \geq 0$ dan $0 \leq \alpha < 1 < \beta$. Fungsi $f \in A$ berada dalam kelas $K_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(\lambda; \alpha; \beta)$ jika f memenuhi ketaksamaan berikut*

$$\alpha < Ny \left\{ \frac{z[I_{m,n}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)]'}{I_{m,n}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)} + \lambda \frac{z^2[I_{m,n}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)]''}{I_{m,n}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)} \right\} < \beta. \quad (6.28)$$

Jika dipilih $I_{m,n}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z) = 1$ dan $\lambda = 0$ dalam (6.28), maka (6.28) akan diturunkan ke bentuk kelas $S^*(\alpha, \beta)$.

Takrif 6.4.2. *Andaikan $\lambda \geq 0$ dan $0 \leq \alpha < \beta$, ditulis $K_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(\lambda; \alpha; \beta)$ kelas fungsi bi-univalen mengandungi fungsi-fungsi dalam A sehingga*

$$f \in K_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(\lambda; \alpha; \beta) \quad f^{-1} \in K_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(\lambda; \alpha; \beta) \quad (6.29)$$

yang f^{-1} adalah songsangan bagi f .

Jika dipilih $\lambda = 0$ dalam (6.29), diperoleh $K_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(0; \alpha; \beta)$ dan lebih mudah ditulis $S_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(\alpha, \beta)$.

Kajian dalam bahagian ini adalah dengan memperkenalkan subkelas baharu iaitu $K_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(\lambda; \alpha; \beta)$ dan mendapatkan batas pekali bagi untuk kelas fungsi $K_{\Omega, \Sigma}^{\theta}(\lambda; \alpha; \beta)$. Kaedah yang digunakan adalah diinspirasi daripada Xu, Xiao dan Srivastava (2012).

Sebelum memperoleh hasil utama berikut dinyatakan beberapa lema dan takrif yang akan digunakan untuk pembuktian nanti.

6.4.1 Keputusan terdahulu anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-Univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki Owa

Kuroki dan Owa (2012) menakrifkan fungsi analisis $p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ sebagai

$$p(z) = 1 + \frac{(\beta - \alpha)i}{\pi} \log \left(\frac{1 - ze^{2\pi(1-\alpha)i/(\beta-\alpha)}}{1 - z} \right); (0 \leq \alpha < 1 < \beta; z \in \mathbb{U}) \quad (6.30)$$

dan telah membuktikan bahawa p memetakan \mathbb{U} ke atas mandala cembung

$$\Phi = \{w : \alpha < R(w) < \beta\}.$$

Diperhatikan bahawa fungsi p , yang ditakrifkan dalam (6.30) boleh diwakilkan sebagai

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n, (z \in \mathbb{U}), \quad (6.31)$$

yang mana

$$B_n = \frac{(\beta - \alpha)}{n\pi} \left(1 - e^{2\pi(1-\alpha)i/(\beta-\alpha)} \right), (n \in \mathbb{N}). \quad (6.32)$$

Bagi membuktikan hasil utama, diperlukan lema berikut:

Lema 6.4.3. (Keogh dan Merkes 1969) Andaikan $p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots$ merupakan fungsi dengan bahagian nyata dalam \mathbb{U} . Maka untuk sebarang nombor ν ,

$$|c_2 - \nu c_1^2| \leq \max\{1, |1 - 2\nu|\}.$$

Lema 6.4.4. Misalkan $f \in A$ dan $0 \leq \alpha < 1 < \beta$, maka $f \in K_{\Omega}^{\Theta}(\lambda; \alpha; \beta)$ jika dan hanya jika

$$\left\{ \frac{z[I_{m,k}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)]'}{I_{m,k}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)} + \lambda \frac{z^2[I_{m,k}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)]''}{I_{m,k}^{\mu}(\alpha, \beta)f(z)} \right\}, (z \in \mathbb{U}) \prec p(z), \quad (z \in \mathbb{U}),$$

dengan $p(z)$ diberikan oleh (6.30).

Lema 6.4.5. (Rogosinki 1943) Andaikan $p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ analisis dan univalen dalam \mathbb{U} dan diandaikan $p(z)$ memetakan \mathbb{U} ke atas mandala cembung. Jika $q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ analisis dalam \mathbb{U} dan memenuhi subordinasi

$$q(z) \prec p(z), (z \in \mathbb{U}) \quad \text{maka} \quad |A_n| \leq |C_n|, (n = 1, 2, \dots). \quad (6.33)$$

6.4.2 Keputusan utama anggaran pekali fungsi subkelas analisis dan bi-Univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki Owa

Dimulakan dengan menunjukkan hasil bagi masalah pekali melibatkan fungsi bagi kelas $K_{\Omega}^{\Theta}(\lambda; \alpha; \beta)$.

Teorem 6.4.6. Andaikan $f \in K_{\Omega}^{\Theta}(\lambda; \alpha; \beta)$, maka

$$|a_2| \leq \frac{|B_1|}{(2\lambda + 1)\Omega_k^m \Theta_k^m} \quad \text{dan}$$

$$|a_n| \leq \frac{|B_1|}{(n-1)(n\lambda + 1)\Omega_k^m \Theta_k^m} \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{|B_1|}{(k-1)(k\lambda + 1)\Omega_k^m \Theta_k^m} \right), (n = 3, 4, 5, \dots),$$

yang $|B_1|, \Omega_k^m$ dan Θ_k^m diberikan oleh

$$|B_1| = \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi} \sin \frac{\pi(1 - \alpha)}{\beta - \alpha}, \quad (6.34)$$

$$\Omega_k^m = \left[\left(\frac{\prod_{q=1}^{j-1} \Gamma(\alpha_j + A_j(k-1))}{\prod_{s=1}^{j-1} \Gamma(\beta_j + B_j(k-1))} \right) \left(\frac{1}{(k-1)!} \right) \right]$$

dan

$$\Theta_k^m = \left[\frac{(k-1)^k (k+\mu-2)!}{\mu! (k-2)!} \right], m \in N_0 = N \cup \{0\}, k \geq 2, \mu \geq 0.$$

Bukti. Ditakrifkan

$$q(z) = \left\{ \frac{z[I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta)f(z)]'}{I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta)f(z)} + \lambda \frac{z^2[I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta)f(z)]''}{I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta)f(z)} \right\}, (z \in \mathbb{U}) \quad (6.35)$$

dan diandaikan fungsi p diberikan oleh (6.30). Maka subordinasi daripada Lema 6.4.4 dapat ditulis seperti berikut:

$$q(z) \prec p(z), (z \in \mathbb{U}). \quad (6.36)$$

Dapat diperhatikan fungsi p yang ditakrifkan oleh (6.30) adalah cembung dalam \mathbb{U} dan berbentuk

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n, (z \in \mathbb{U})$$

yang mana B_n diberikan oleh (6.32). Jika diambil

$$q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, (z \in \mathbb{U}).$$

Maka daripada Lema (6.4.5) diperhatikan subordinasi (6.36) mengimplikasikan

$$|A_n| \leq |B_1|, (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (6.37)$$

yang $|B_1|$ diberikan oleh (6.34). Sekarang, (6.35) mengimplikasikan bahawa

$$z[I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta)f(z)]' + \lambda z^2[I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta)f(z)]'' = I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta)f(z)q(z), (z \in \mathbb{U}).$$

Maka, dengan membandingkan pekali-pekali bagi z^n bagi kedua-dua bahagian,

diperoleh

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{(n-1)(1+n\lambda)\Omega_k^m\Theta_k^m} \\
&\times |A_{n-1}\Omega_k^m\Theta_k^m + a_2A_{n-2}\Omega_k^m\Theta_k^m + a_3A_{n-3}\Omega_k^m\Theta_k^m + \cdots + a_{n-1}A_1\Omega_k^m\Theta_k^m| \\
&\leq \frac{1}{(n-1)(1+n\lambda)\Omega_k^m\Theta_k^m} \\
&\times |(A_{n-1} + [a_2A_{n-2} + a_3A_{n-3} + \cdots + a_{n-1}A_1])\Omega_k^m\Theta_k^m| \\
&\leq \frac{1}{(n-1)(1+n\lambda)\Omega_k^m\Theta_k^m} \\
&\times (|A_{n-1}| + |a_2||A_{n-2}| + |a_3||A_{n-3}| + \cdots + |a_{n-1}||A_1|)\Omega_k^m\Theta_k^m \\
&\leq \frac{|B_1|}{(n-1)(1+n\lambda)\Omega_k^m\Theta_k^m} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\Omega_k^m\Theta_k^m,
\end{aligned}$$

yang B_1 diberi oleh (6.34) dan $|a_1| = 1$. Oleh itu, diperoleh

$$|a_2| = \frac{|B_1|}{(2\lambda + 1)\Omega_k^m\Theta_k^m}.$$

Bagi pembuktian bahagian teorem yang selebihnya. Perlu ditunjukkan bahawa

$$\begin{aligned}
&\frac{|B_1|}{(n-1)(1+n\lambda)\Omega_k^m\Theta_k^m} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\Omega_k^m\Theta_k^m \\
&\leq \frac{|B_1|}{(n-1)(1+n\lambda)\Omega_k^m\Theta_k^m} \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{|B_1|}{(k-1)(1+k\lambda)\Omega_k^m\Theta_k^m} \right), n = 3, 4, 5, \dots \quad (6.38)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan kaedah aruhan bagi pembuktian (6.38), bagi kes $n = 3$ jelas diperoleh. Seterusnya, diandaikan ketaksamaan (6.38) benar untuk $n = m + 1$, maka pengiraan memberikan

$$\begin{aligned}
|a_{m+1}| &= \frac{|B_1|}{m[(m+1)\lambda + 1]\Omega_k^m\Theta_k^m} \sum_{k=1}^m |a_k|\Omega_k^m\Theta_k^m \\
&= \frac{|B_1|}{m[(m+1)\lambda + 1]\Omega_k^m\Theta_k^m} \left[\sum_{k=1}^{n-1} |a_k| + |a_m| \right] \Omega_k^m\Theta_k^m
\end{aligned}$$

dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 |a_{m+1}| &\leq \frac{|B_1|}{m[(m+1)\lambda + 1]\Omega_k^m \Theta_k^m} \left[\prod_{k=2}^{m-1} \left(1 + \frac{|B_1|}{(k-1)(1+k\lambda)} \right) \Omega_k^m \Theta_k^m \right] \\
 &\quad + \frac{|B_1|}{m[(m+1)\lambda + 1]\Omega_k^m \Theta_k^m} \times \frac{|B_1|}{(m-1)(m\lambda + 1)} \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 + \frac{|B_1|}{(k-1)(1+k\lambda)} \right) \Omega_k^m \Theta_k^m. \\
 &= \frac{|B_1|}{m[(m+1)\lambda + 1]\Omega_k^m \Theta_k^m} \prod_{k=2}^{m-1} \left(1 + \frac{|B_1|}{(k-1)(1+k\lambda)} \right) \Omega_k^m \Theta_k^m.
 \end{aligned}$$

yang mengimplikasikan bahawa ketaksamaan (6.38) benar untuk $n = m = 1$. Oleh yang demikian, bagi $|a_n|, n = 3, 4, 5, \dots$ mengikuti seperti yang dinyatakan dalam Teorem 6.4.6. Ini melengkapkan pembuktian bagi Teorem 6.4.6.

Dengan mengambil $\lambda = 0$ dalam Teorem 6.4.6 dan dengan menggunakan identiti berkaitan, diperoleh

$$\frac{|B_1|}{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{|B_1|}{n-1} \right) \Omega_k^m \Theta_k^m = \prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-2+|B_1|}{k-1} \right) \Omega_k^m \Theta_k^m, (n = 3, 4, 5, \dots)$$

diperoleh korolari berikut:

Korolari 6.4.7. Jika $f \in S^*(\alpha, \beta)$, maka

$$\begin{aligned}
 |a_n| &\leq \frac{|B_1|}{(n-1)\Omega_k^m \Theta_k^m} \prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-2+|B_1|}{k-1} \right) \Omega_k^m \Theta_k^m, \\
 &\leq \prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-2+|B_1|}{(k-1)\Omega_k^m \Theta_k^m} \right).
 \end{aligned}$$

Dengan mengambil $I_{m,k}^\mu(\alpha, \beta) = 1$ dalam Korolari 6.4.7 diperoleh keputusan yang sama dengan yang diperoleh oleh Sun, Jiang dan Rasila (2015).

Korolari 6.4.8. Jika $f \in S^*(\alpha, \beta)$, maka

$$\begin{aligned}
 |a_n| &\leq \frac{|B_1|}{(n-1)} \prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-2+|B_1|}{k-1} \right) \Omega_k^m \Theta_k^m, \\
 &\leq \prod_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-2+|B_1|}{(k-1)\Omega_k^m \Theta_k^m} \right),
 \end{aligned}$$

dan $|B_1|$ diberikan oleh (6.32). Jika $0 \leq \alpha < 1 < \beta$, diperoleh

$$\begin{aligned} |B_1| &= \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi} \sin \frac{\pi(1 - \alpha)}{\beta - \alpha} \leq \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi} \times \frac{\pi(1 - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &\leq 2(1 - \alpha) \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Oleh itu, daripada Korolari 6.4.7 diperoleh

$$|a_n| \leq \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-2+|B_1|}{k-1} \right) \leq \prod_{k=2}^n \left(\frac{k}{k-1} \right) = n, (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Ini menunjukkan sempadan bagi pekali dalam Korolari 6.4.7 ada hubungan dengan terkaan yang dibuktikan oleh de Branges pada tahun 1985 iaitu terkaan Bieberbach.

Bab seterusnya akan membincangkan subkelas fungsi ganjil univalen menggunakan pengoperasi Salagean dengan pekali negatif.

BAB VII

SUBKELAS FUNGSI GANJIL UNIVALEN DITAKRIFKAN MENGGUNAKAN PENGOPERASI SALAGEAN DENGAN PEKALI NEGATIF

Di dalam Bab ini, akan dibincangkan beberapa sifat fungsi yang berada dalam kelas fungsi ganjil univalen. Kelas fungsi ini ditakrif dengan menggunakan pengoperasian Salagean.

7.1 PENGENALAN FUNGSI GANJIL UNIVALEN

Katalah A dilambangkan sebagai kelas fungsi yang berbentuk (1.2) univalen dan holomorfik dalam cakera unit $z \in \mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$. Dilambangkan A_c kelas bagi fungsi ganjil univalen dalam A ditulis dalam kembangan berikut:

$$h(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots + c_{2n+1}z^{2n+1} + \dots = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}z^{2n+1} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n-1}z^{2n-1}. \quad (7.1)$$

Didapati bahawa $h(z) \in A_c$ jelmaan punca kuasa dua $f(z)$ jika dan hanya jika wujud fungsi $f(z) \in S$ sehingga

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots.$$

Kajian berkenaan fungsi ganjil univalen telah dilakukan oleh ramai pengkaji ternama terutama masalah berkaitan anggaran pekali. Antara keputusan nilai pekali yang diperoleh oleh pengkaji terdahulu antaranya, Littlewood dan Paley (1932) telah menunjukkan $|C_n| \leq \Lambda$ untuk semua n , dengan Λ adalah pemalar mutlak. Kaedah mereka memberikan $\Lambda < 14$ (Duren 1983).

Kajian pekali ini diteruskan oleh ramai pengkaji lain. Robertson (1936) telah memberikan terkaan berikut:

$$1 + \sum_{n=1}^{k-1} |c_{2n+1}|^2 \leq n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Robertson menggunakan kaedah Loewner dan membuktikan untuk $n = 3$. Friedland (1970) menggunakan kaedah ketaksamaan Grunsky untuk pembuktian bagi $n = 4$. Fekete dan Szego (1933) menggunakan kaedah Löwner dan memperoleh ketaksamaan tepat.

$$|c_5| \leq 1/2 + e^{-2/3} = 1.013\dots$$

Leeman (1976) memberikan hasil bagi $|C_7| = 1090/1083$. Hu (1986) turut mengkaji pekali melibatkan fungsi ganjil univalen. Beberapa kajian terkini melibatkan fungsi ganjil univalen ini dilakukan oleh Ye (2005), Agrawal dan Sahoo (2017), Seker dan Sumer (2017) dan beberapa pengkaji lagi.

7.2 FUNGSI GANJIL UNIVALEN DITAKRIFKAN MENGGUNAKAN OPERASI TERBITAN SALAGEAN

Dalam bahagian ini, diperkenalkan fungsi ganjil univalen yang ditakrifkan menggunakan operasi terbitan Salagean.

Andaikan A_c kelas fungsi ganjil univalen dengan pekali positif yang berbentuk:

$$h(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1}z^{2k-1}, \quad (7.2)$$

dan analisis dalam \mathbb{U} .

Misalkan pula T_c bagi A fungsi ganjil univalen dengan pekali negatif dan analisis dalam \mathbb{U} berbentuk:

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |c_{2k-1}|z^{2k-1}. \quad (7.3)$$

Sekarang, andaikan $S^*(\alpha), K(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1$, masing-masing kelas fungsi bak-bintang

berperingkat α dan kelas fungsi cembung berperingkat α yang univalen, iaitu

$$S^*(\alpha) = \left\{ h \in A_c : \text{Ny} \left\{ \frac{zh'(z)}{h(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\} \quad (7.4)$$

$$K(\alpha) = \left\{ h \in A_c : \text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\}. \quad (7.5)$$

Andaikan pula $T^*(\alpha)$ dan $C(\alpha)$ sebagai subkelas T yang masing-masing adalah fungsi univalen bak-bintang peringkat α dan univalen cembung peringkat α dengan pekali negatif diberikan oleh

$$T^*(\alpha) = \left\{ h \in T_c : \text{Ny} \left\{ \frac{zh'(z)}{h(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\} \quad (7.6)$$

$$C(\alpha) = \left\{ h \in T_c : \text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\}. \quad (7.7)$$

Sekarang, andaikan fungsi $h \in A_c$. Dengan menggunakan pendekatan oleh Salagean (1983), diterbitkan pengoperasi berikut:

$$D^0 h(z) = h(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1}$$

$$D^1 h(z) = Dh(z) = zh'(z) = z + 3c_3 z^3 + 5c_5 z^5 + \dots = z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)c_{2k-1} z^{2k-1}$$

...

$$D^n h(z) = D(D^{n-1}h(z)) = z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}, \quad (n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Oleh itu, $H(n, z) \in A_c$ fungsi ganjil dan univalen yang ditakrifkan menggunakan pengoperasi terbitan Salagean ditulis sebagai

$$H(n, z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}, \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (7.8)$$

Takrif 7.2.1. *Andaikan $h \in A_c$, maka*

$$S_n(\alpha) = \left\{ h \in A_c : \text{Ny} \left\{ \frac{D^{n+1}h'(z)}{D^n h(z)} - 1 \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\}. \quad (7.9)$$

untuk $0 \leq \alpha \leq 1$ dan $n \in \mathbb{N}_0$.

Didapati bahawa, $S_0(\alpha) = S^*(\alpha)$ dan $S_1(\alpha) = K(\alpha)$, dan masing-masing adalah

$$\frac{Dh'(z)}{h(z)} = \frac{zh'(z)}{h(z)} \quad \text{dan} \quad \frac{D^2h'(z)}{Dh(z)} = \frac{z(zh'(z))'}{zh'(z)}. \quad (7.10)$$

Seterusnya, ditakrifkan $T_n(\alpha)$ seperti berikut:

Takrif 7.2.2. *Andaikan $h \in T_c$, maka*

$$T_n(\alpha) = \left\{ h \in T_c : \text{Ny} \left\{ \frac{D^{n+1}h'(z)}{D^n h(z)} - 1 \right\} > \alpha, \right\}. \quad (7.11)$$

dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Diperhatikan bahawa, $T_0(\alpha) = T^*(\alpha)$ dan $T_1(\alpha) = C(\alpha)$. Oleh yang demikian $T_n(\alpha) \subset S_n(\alpha)$.

7.3 PEKALI KETAKSAMAAN BAGI KELAS FUNGSI GANJIL UNIVALEN SALAGEAN

Dalam bahagian ini kajian akan mendapatkan pekali ketaksamaan bagi kelas fungsi ganjil univalen Salagean melibatkan pekali positif dan pekali negatif.

Berikut merupakan hasil pekali ketaksamaan bagi kelas fungsi ganjil univalen Salagean melibatkan pekali positif.

Teorem 7.3.1. *Katalah fungsi $h(z)$ diberi oleh (7.2), maka $h \in S_n(\alpha)$ jika dan hanya jika*

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n \alpha] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha,$$

dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Bukti. Untuk pembuktian teorem di atas, adalah memadai dengan menunjukkan bahawa

$$\left| \frac{D^{n+1}h(z)}{D^n h(z)} - 1 \right| \leq 1 - \alpha.$$

iaitu

$$\begin{aligned} & \left| \frac{D^{n+1}h(z)}{D^n h(z)} - 1 \right| = \left| \frac{D^{n+1}h(z) - D^n h(z)}{D^n h(z)} \right| \\ &= \left| \frac{z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^{n+1} c_{2k-1} z^{2k-1} - (z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1})}{z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^{n+1} c_{2k-1} z^{2k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}}{z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n] c_{2k-1} z^{2k-1}}{z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n] |c_{2k-1}| |z|^{2k-1}}{|z| - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| |z|^{2k-1}}, \quad |z| = 1 \\ &= \frac{\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n] |c_{2k-1}|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}|}. \end{aligned}$$

Seterusnya,

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n + (2k-1)^n - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha,$$

maka

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq (1 - \alpha) -$$

$$\left[\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^n - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \right]$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq (1 - \alpha) - \left[\sum_{k=2}^{\infty} (1 - \alpha) [(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \right]$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq (1 - \alpha) \left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| \right]$$

Justeru,

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n] |c_{2k-1}|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}|} \leq 1 - \alpha.$$

Dan diperoleh

$$\left| \frac{D^{n+1}h(z)}{D^n h(z)} - 1 \right| \leq 1 - \alpha.$$

Hasil yang diperoleh adalah sama dengan hasil daripada kajian Kardioglu (2003), dengan mempertimbangkan hasil bagi pekali ganjil sahaja.

Bila mengambil nilai $n = 0$ ke dalam Teorem 7.3.1, diperoleh natijah berikut:

Korolari 7.3.2. *Katalah fungsi $h(z)$ diberi oleh (7.2), maka $h \in S^*(\alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} (2k-1-\alpha) |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha$.*

Bila mengambil nilai $n = 1$ dalam Teorem 7.3.1, diperoleh natijah berikut:

Korolari 7.3.3. *Katalah fungsi $h(z)$ diberi oleh (7.2), maka $h \in K(\alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^2 - \alpha(2k-1)] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha$.*

Seterusnya, akan dikaji pekali ketaksamaan bagi fungsi ganjil univalen ditakrifkan menggunakan pengoperasian Salagean bagi pekali negatif.

Teorem 7.3.4. *Katalah fungsi $h(z)$ diberi oleh (4.2.2), maka $h \in T_n(\alpha)$ jika dan hanya jika*

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n \alpha] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha,$$

dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Bukti. Adalah memadai dengan hanya menunjukkan bahagian "jika" sahaja. Andaikan bahawa

$$\text{Ny} \left\{ \frac{D^{n+1}h(z)}{D^n h(z)} \right\} = \text{Ny} \left\{ \frac{z - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^{n+1} |c_{2k-1}| z^{2k-1}}{z - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| z^{2k-1}} \right\} > \alpha.$$

Pilih nilai pada paksi nyata z , sehingga $\frac{D^{n+1}h(z)}{D^n h(z)}$ adalah nyata.

Andaikan $z \rightarrow 1^-$ sepanjang paksi nyata, diperoleh

$$\begin{aligned}
 1 - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^{n+1} |c_{2k-1}| &\geq \alpha \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| \right] \\
 - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)^{n+1} |c_{2k-1}| + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha (2k-1)^n |c_{2k-1}| &\geq -1 + \alpha \\
 - \sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| &\geq -(1 - \alpha) \\
 \sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| &\leq 1 - \alpha.
 \end{aligned}$$

Oleh itu, diperoleh

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha.$$

Keputusan yang diperoleh adalah sama dengan hasil Kardioglu (2003) jika dipertimbangkan pekali-pekali ganjil sahaja. Apabila $n = 0$ dan $n = 1$, Teorem 7.3.4 memberikan Korolari 7.3.5 dan Korolari 7.3.6.

Korolari 7.3.5. *Katalah fungsi $h(z)$ diberikan oleh (7.2), maka $h \in T^*(\alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} (2k-1-\alpha) |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha$.*

Korolari 7.3.6. *Katalah fungsi $h(z)$ diberikan oleh (7.2), maka $h \in C(\alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^2 - \alpha(2k-1)] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha$.*

7.4 TEOREM PERTUMBUHAN DAN EROTAN BAGI KELAS FUNGSI GANJIL SALAGEAN UNIVALEN DENGAN PEKALI NEGATIF

Bahagian ini akan membincangkan teorem pertumbuhan dan erotan bagi fungsi ganjil univalen Salagean.

Berikut merupakan hasil yang diperoleh bersama pembuktiannya:

Teorem 7.4.1. Jika fungsi $h(z)$ diberikan oleh (7.3) adalah unsur kelas $T_n(\alpha)$ untuk $0 < |z| = r < 1$, maka

$$r - \frac{1 - \alpha}{(3^{n+1} - 3^n \alpha)} r^3 \leq |h(z)| \leq r + \frac{(1 - \alpha)}{(3^{n+1} - 3^n \alpha)} r^3$$

dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Kesamaan diperoleh apabila h diberi oleh

$$h(z) = r - \frac{(1 - \alpha)}{(3^{n+1} - 3^n \alpha)} r^3, \quad (|z| = r).$$

Bukti. Daripada Teorem 7.3.4,

$$[3^{n+1} - \alpha 3^n] \sum_{k=2}^{\infty} |c_{2k-1}| \leq \sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha.$$

Seterusnya, memberikan

$$|c_{2k-1}| \leq \frac{1 - \alpha}{[(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n]}.$$

Bagi $k = 2$, diperoleh

$$|c_3| \leq \frac{1 - \alpha}{[3^{n+1} - \alpha 3^n]}.$$

Oleh itu

$$\begin{aligned} |h(z)| &= \left| z + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} \right|, \quad (|z| = r), \\ &\leq r + \sum_{k=2}^{\infty} |c_{2k-1}| r^{2k-1} \\ &\leq r + |c_3| r^3, \quad k = 2 \\ &\leq r + \frac{1 - \alpha}{[3^{n+1} - \alpha 3^n]} r^3, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 |h(z)| &= z - \sum_{k=2}^{\infty} |c_{2k-1}|, \quad (|z| = r), \\
 &\geq r - \sum_{k=2}^{\infty} |c_{2k-1}| r^{2k-1} \\
 &\geq r - |c_3| r^3, \quad k = 2 \\
 &\geq r - \frac{1 - \alpha}{[3^{n+1} - \alpha 3^n]} r^3.
 \end{aligned}$$

Jadi, didapati bahawa

$$r - \frac{1 - \alpha}{(3^{n+1} - 3^n \alpha)} r^3 \leq |h(z)| \leq r + \frac{1 - \alpha}{(3^{n+1} - 3^n \alpha)} r^3.$$

Jika $n = 0$ dan $n = 1$ dalam Teorem 7.4.1, maka diperoleh korolari berikut:

Korolari 7.4.2. *Jika fungsi $h(z)$ ditakrifkan seperti (7.2), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h \in T^*(\alpha)$ jika dan hanya jika*

$$r - \frac{1 - \alpha}{(3 - \alpha)} r^3 \leq |h(z)| \leq r + \frac{1 - \alpha}{(3 - \alpha)} r^3, \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Korolari 7.4.3. *Jika fungsi $h(z)$ ditakrifkan seperti (7.2), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h \in K(\alpha)$ jika dan hanya jika*

$$r - \frac{1 - \alpha}{[3^2 - 3\alpha]} r^3 \leq |h(z)| \leq r + \frac{1 - \alpha}{[3^2 - 3\alpha]} r^3, \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Teorem 7.4.4. *Cakera $|z| < 1$ adalah dipetakan pada domain yang mengandungi cakera*

$$|w| < 1 - \frac{1 - \alpha}{[3^{n+1} - 3^n \alpha]}$$

oleh fungsi $h \in T_n(\alpha)$ diberikan oleh Takrif 7.2.2 dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Bukti. Untuk pembuktian Teorem ini, adalah cukup dengan mengandaikan $r \rightarrow 1$ dan $h(z) = w$.

Bila $n = 0$ dan $n = 1$, Teorem 7.4.4 mengimplikasikan korolari berikut:

Korolari 7.4.5. Cakera $|z| < 1$ adalah dipetakan pada suatu domain yang mengandungi cakera $|w| \leq \frac{1-\alpha}{3-\alpha}$ oleh fungsi $h \in T^*(\alpha)$ dan cakera $|w| \leq 1 - \frac{1-\alpha}{3(3-\alpha)}$ oleh fungsi $h \in C(\alpha)$.

Teorem 7.4.6. Jika fungsi $h(z)$ diberi oleh (7.3) adalah unsur kelas $T(\alpha)$ untuk $0 < |z| = r < 1$, maka bagi $|z| = r$,

$$1 - \frac{1-\alpha}{[3^n - 3^{n-1}\alpha]} r^2 \leq |h'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{[3^n - 3^{n-1}\alpha]} r^2,$$

dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Bukti. Diketahui bahawa

$$|h'(z)| \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) |c_{2k-1}| |z|^{2k-2} \leq 1 + 3r^2 \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) |c_{2k-1}|.$$

Daripada pembuktian Teorem 7.3.1, telah ditunjukkan bahawa

$$\sum_{k=2}^{\infty} |c_{2k-1}| \leq \frac{1-\alpha}{[(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n]}.$$

Oleh itu,

$$|h'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{[3^n - \alpha 3^{n-1}]} r^2.$$

dan dengan menggunakan hujah yang sama, diperoleh

$$|h'(z)| \geq 1 - \frac{1-\alpha}{[3^n - \alpha 3^{n-1}]} r^2.$$

Oleh yang demikian, diperoleh

$$1 - \frac{1-\alpha}{[3^n - \alpha 3^{n-1}]} r^2 \leq |h'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{[3^n - \alpha 3^{n-1}]} r^2.$$

Keputusan yang diperoleh adalah sama dengan Kardioglu (2003) dengan mempertimbangkan keputusan pekali-pekali ganjil. Apabila $n = 0$ dan $n = 1$, Teorem 7.4.6 memberikan Korolari berikut:

Korolari 7.4.7. Jika fungsi $h(z)$ diberi oleh (7.2), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h \in T^*(\alpha)$ jika dan hanya jika

$$1 - \frac{3(1-\alpha)}{3-\alpha}r^2 \leq |h'(z)| \leq 1 + \frac{3(1-\alpha)}{3-\alpha}r^2.$$

Korolari 7.4.8. Jika fungsi $h(z)$ diberi oleh (7.2), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h \in K(\alpha)$ jika dan hanya jika

$$1 - \frac{1-\alpha}{3-\alpha}r^2 \leq |h'(z)| \leq 1 + \frac{1-\alpha}{3-\alpha}r^2.$$

7.5 KOMBINASI LINEAR CEMBUNG BAGI KELAS FUNGSI GANJIL SALAGEAN UNIVALEN DENGAN PEKALI NEGATIF

Di sini diberikan pula hasil kombinasi linear cembung bagi kelas fungsi ganjil Salagean univaleen dengan pekali negatif.

Teorem 7.5.1. Jika $h(z)$ diberi oleh (7.3) unsur dalam kelas $T_n(\alpha)$. Maka kelas $T_n(\alpha)$ adalah tertutup dengan kombinasi linear cembung.

Bukti. Katalah fungsi h dan g masing-masing ditakrifkan seperti berikut

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1}, \quad (c_{2k-1} \geq 0) \quad \text{dan}$$

$$g(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} b_{2k-1} z^{2k-1}, \quad (b_{2k-1} \geq 0).$$

Andaikan bahawa h dan g berada dalam kelas $T_n(p, \alpha)$, adalah memadai dengan membuktikan $G(z)$ yang ditakrifkan sebagai

$$G(z) = (1-\lambda)h(z) + \lambda g(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} d_{2k-1} z^{2k-1}, \quad (d_{2k-1} \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1),$$

juga berada dalam kelas $T_n(\alpha)$. Daripada

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] c_{2k-1} \leq 1 - \alpha \quad \text{dan}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] b_{2k-1} \leq 1 - \alpha$$

maka daripada Teorem 7.3.1, dapat dilihat bahawa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] d_{2k-1} \\ = & \sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] [(1-\lambda)c_{2k-1} + \lambda b_{2k-1}] \\ & = (1-\lambda) \sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] c_{2k-1} \\ & \quad + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] b_{2k-1} \\ \leq & (1-\lambda)(1-\alpha) + \lambda(1-\alpha) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Oleh itu $h \in T_n(\alpha)$.

7.6 HASIL TAMBAH SEPARA FUNGSI ANALITIK GANJIL DITAKRIFKAN MENGGUNAKAN OPERATOR PEMBEZA SALAGEAN

Dalam bahagian ini, akan dibincangkan berkenaan hasil tambah separa fungsi analisis ganjil dan univalen ditakrifkan menggunakan pengoperasi Pembeza Salagean.

Syarat cukup bagi fungsi ganjil univalen menggunakan pengoperasian pembeza Salagean bagi (7.2) dalam $S_n(\alpha)$ dalam Teorem 7.3.1 diberikan seperti berikut

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^m (2k-1-\alpha)] |c_{2k-1}| \leq 1 - \alpha. \quad (7.12)$$

Kaedah bagi kajian ini dimotivasikan daripada kajian oleh Silverman (1997), Frasin (2005) dan Frasin (2008).

Nisbah fungsi ganjil Salagean univalen (7.8) terhadap beberapa bentuk siri

pecahan separa diberikan seperti berikut:

$$H(m, z) = z + \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-1}, \quad (7.13)$$

apabila pekali bagi $H(m, z)$ cukup kecil untuk memenuhi keadaan (7.12).

Seterusnya, akan ditentukan batas bawah tepat bagi $Ny \{H(m, z)/H_n(m, z)\}$, $Ny \{H_n(m, z)/H(m, z)\}$, $Ny \{H'(m, z)/H'_n(m, z)\}$ dan $Ny \{H'_n(m, z)/H'(m, z)\}$.

Teorem 7.6.1. *Jika H dalam bentuk (7.8) memenuhi syarat (7.12), maka*

$$Ny \left\{ \frac{H(m, z)}{H_n(m, z)} \right\} \geq \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha) - 1 + \alpha}{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{U}), \quad (7.14)$$

dengan $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dan $z \in \mathbb{U}$.

Kesamaan (7.14) akan diperoleh apabila fungsi diberi

$$H(m, z) = z + \frac{1-\alpha}{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)} z^{2n+1}.$$

Bukti.

Boleh ditulis

$$\begin{aligned} & \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \\ &= \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{H(m, z)}{H_n(m, z)} - \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha) - 1 + \alpha}{1-\alpha} \right] \\ &= \frac{1 + \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2} + \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}}{1 + \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}} \\ &= \frac{1+A(z)}{1+B(z)}, \end{aligned}$$

dengan

$$A(z) = \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2} + \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}$$

dan

$$B(z) = \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}.$$

Seterusnya, ditakrifkan fungsi $w(z)$ dengan mengambil

$$\frac{1+A(z)}{1+B(z)} = \frac{1+w(z)}{1-w(z)},$$

diperoleh

$$w(z) = \frac{A(z) - B(z)}{2 + A(z) + B(z)}.$$

Maka diperoleh,

$$w(z) = \frac{\left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2} + \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}}$$

dan

$$|w(z)| \leq \frac{\left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m |c_{2k-1}|}{2 - 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^m |c_{2k-1}| + \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m |c_{2k-1}|}.$$

Sekarang $|w(z)| \leq 1$ jika dan hanya jika

$$2 \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m |c_{2k-1}| \leq 2 - 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^m |c_{2k-1}|$$

yang setara dengan

$$\sum_{k=2}^n (2k-1)^m |c_{2k-1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] (2k-1)^m |c_{2k-1}| \leq 1. \quad (7.15)$$

Adalah cukup dengan hanya membuktikan bahagian sebelah kiri bagi (7.15) terbatas sebelah atas oleh

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)^m(2k-1-\alpha)}{1-\alpha} \right] |c_{2k-1}|, \quad (7.16)$$

atau, setara dengan

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^n (2k-1)^m |c_{2k-1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] (2k-1)^m |c_{2k-1}| \\
& \leq \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)^m (2k-1-\alpha)}{1-\alpha} \right] (2k-1)^m |c_{2k-1}| \\
& \Rightarrow \sum_{k=2}^n |c_{2k-1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] |c_{2k-1}| \\
& \leq \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)^m (2k-1-\alpha)}{1-\alpha} \right] |c_{2k-1}|
\end{aligned}$$

yang setara dengan

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)^m (2k-1-\alpha) - 1 + \alpha}{1-\alpha} \right] |c_{2k-1}| \\
& + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{[(2k-1)^m (2k-1-\alpha)] - [(2n+1)^m (2n+1-\alpha)]}{1-\alpha} \right] |c_{2k-1}| \geq 0.
\end{aligned}$$

Untuk melihat fungsi yang diberi oleh

$$H(m, z) = z + \frac{1-\alpha}{(2n+1)^m (2n+1-\alpha) - 1 + \alpha} z^{2n+1}.$$

memberikan keputusan yang tepat, diperhatikan untuk $z = re^{\frac{i\pi}{n}}$

$$\begin{aligned}
\frac{H(m, z)}{H_n(m, z)} &= 1 + \frac{1-\alpha}{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)} z^{2n+1} \rightarrow 1 - \frac{1-\alpha}{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)} \\
&= \frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha) - 1 + \alpha}{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)} \text{ apabila } r \rightarrow 1^-.
\end{aligned}$$

Pembuktian telah lengkap.

Dengan mengambil nilai $m = 0$ dan $m = 1$ dalam Teorem 7.6.1 masing-masing, diperoleh korolari berikut:

Korolari 7.6.2. Andaikan H dalam bentuk (7.8) memenuhi syarat (7.12), maka

$$N_y \left\{ \frac{H(0, z)}{H_n(0, z)} \right\} \geq \frac{2n}{2n+1-\alpha}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.17)$$

Kesamaan (7.17) akan diperoleh apabila fungsi diberi

$$H(0, z) = z + \frac{1-\alpha}{2n+1-\alpha} z^{2n+1}.$$

Korolari 7.6.3. Andaikan H berbentuk (7.8) memenuhi syarat (7.12), maka

$$N_y \left\{ \frac{H(1, z)}{H_n(1, z)} \right\} \geq \frac{2n(2n+2-\alpha)}{(2n+1)(2n+1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.18)$$

Kesamaan (7.18) akan diperoleh apabila fungsi diberi oleh

$$H(1, z) = z + \frac{1-\alpha}{(2n+1)(2n+1-\alpha)} z^{2n+1}.$$

Teorem 7.6.4. Andaikan H dalam bentuk (7.8) memenuhi syarat (7.12), maka

$$N_y \left\{ \frac{H_n(m, z)}{H(m, z)} \right\} \geq \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(2n+1)^m(2n+1-\alpha) + 1-\alpha}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.19)$$

Kesamaan (7.19) akan diperoleh apabila fungsi diberi

$$H(m, z) = z + \frac{1-\alpha}{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)} z^{2n+1}.$$

Bukti.

Ditulis

$$\begin{aligned} & \frac{1+w(z)}{1-w(z)} = \\ & \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha) + 1-\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{H_n(m, z)}{H(m, z)} - \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(2n+1)^m(2n+1-\alpha) + 1-\alpha} \right] \\ & = \frac{1 + \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2} - \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}}{1 + \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}}. \end{aligned}$$

Dengan mengikuti langkah-langkah yang sama seperti pembuktian Teorem 7.6.1, diperoleh

$$w(z) = \frac{\left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)+1-\alpha}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2} - \left[\frac{1-\alpha-(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m c_{2k-1} z^{2k-2}}$$

dan

$$|w(z)| \leq \frac{\left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)+1-\alpha}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m |c_{2k-1}|}{2 + 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^m |c_{2k-1}| - \left[\frac{1-\alpha-(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^m |c_{2k-1}|}.$$

Sekarang $|w(z)| \leq 1$ jika dan hanya jika

$$\sum_{k=2}^n (2k-1)^m |c_{2k-1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \right] (2k-1)^m |c_{2k-1}| \leq 1 \quad (7.20)$$

Oleh kerana bahagian sebelah kiri (7.20) terbatas atas oleh (7.16), pembuktian telah lengkap.

Dengan mengambil $m = 0$ dan $m = 1$ masing-masing ke dalam Teorem 8.2.1, diperoleh korolari berikut:

Korolari 7.6.5. *Andaikan H dalam bentuk (7.8) memenuhi syarat (7.12), maka*

$$\text{Ny} \left\{ \frac{H_n(0, z)}{H(0, z)} \right\} \geq \frac{(2n+1-\alpha)}{2(n+1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.21)$$

Kesamaan (7.21) akan diperoleh apabila fungsi diberi

$$H(0, z) = z + \frac{1-\alpha}{2n+1-\alpha} z^{2n+1}.$$

Korolari 7.6.6. *Andaikan H berbentuk (7.8) memenuhi syarat (7.12), maka*

$$\text{Ny} \left\{ \frac{H_n(1, z)}{H(1, z)} \right\} \geq \frac{(2n+1)(2n+1-\alpha)}{(2n+1)(2n+1-\alpha)+1-\alpha}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.22)$$

Kesamaan (7.22) akan diperoleh apabila fungsi diberi

$$H(1, z) = z + \frac{1 - \alpha}{(2n + 1)(2n + 1 - \alpha)} z^{2n+1}.$$

Teorem 7.6.7. Andaikan H berbentuk (7.8) memenuhi syarat (7.12), maka

$$\text{Ny} \left\{ \frac{H'(m, z)}{H'_n(m, z)} \right\} \geq \frac{(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha)}{(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha) + 1 - \alpha}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.23)$$

dan

$$\text{Ny} \left\{ \frac{H'_n(m, z)}{H'(m, z)} \right\} \geq \frac{(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha)}{(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha) + 1 - \alpha}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.24)$$

Kesamaan (7.6.4) dan (7.24) akan diperoleh apabila fungsi diberi

$$H(m, z) = z + \frac{1 - \alpha}{(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha)} z^{2n+1}.$$

Bukti.

Ditulis

$$\frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} = \frac{(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha)}{(n + 1)(1 - \alpha)} \left[\frac{H'(m, z)}{H'_n(m, z)} - \frac{[(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha) - (n + 1)(1 - \alpha)]}{(2n + 1)^m (2n + 1 - \alpha)} \right]$$

yang

$$w(z) = \frac{\left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} c_{2k-1} z^{2k-2}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^{m+1} c_{2k-1} z^{2k-2} + \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} c_{2k-1} z^{2k-2}}$$

dan

$$|w(z)| \leq \frac{\left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}|}{2 + 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| + \left[\frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}|}.$$

Sekarang $|w(z)| \leq 1$ jika

$$\sum_{k=2}^n (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| + \left[\frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| \leq 1. \quad (7.25)$$

Oleh kerana bahagian sebelah kiri bagi (7.25) terbatas atas oleh (7.16), adalah cukup untuk ditunjukkan bahawa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^n (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| + \left[\frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| \\ & \leq \sum_{k=2}^n \left[\frac{(2k-1)^m (2k-1-\alpha)}{1-\alpha} \right] (2k-1)^m |c_{2k-1}| \end{aligned}$$

adalah setara

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^n \left[\frac{(2k-1)^m (2k-1-\alpha) - (1-\alpha)(2k-1)}{1-\alpha} \right] |c_{2k-1}| \\ & + \left[\frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| \geq 0 \end{aligned}$$

pembuktian (7.6.7) telah lengkap.

Untuk membuktikan keputusan (7.24). Ditulis

$$\begin{aligned} \frac{1+w(z)}{1-w(z)} &= \frac{(n+1)(1-\alpha) + (2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{1-\alpha} \\ & \left[\frac{H'(m, z)}{H_n'(m, z)} - \frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha) + (2n+1)^m (2n+1-\alpha)} \right] \end{aligned}$$

yang

$$\begin{aligned} & w(z) = \\ & \frac{\left[1 + \frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} c_{2k-1} z^{2k-2}}{2 + 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^{m+1} c_{2k-1} z^{2k-2} + \left[1 + \frac{(2n+1)^m (2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)} \right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} c_{2k-1} z^{2k-2}} \end{aligned}$$

dan

$$|w(z)| \leq \frac{\left[1 + \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)}\right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}|}{2 + 2 \sum_{k=2}^n (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| + \left[1 + \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)}\right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}|}.$$

Sekarang $|w(z)| \leq 1$ jika

$$\sum_{k=2}^n (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| + \left[1 + \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)}\right] \sum_{k=n+1}^{\infty} (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| \leq 1 \quad (7.26)$$

Oleh kerana bahagian sebelah kiri bagi (7.27) terbatas atas oleh (7.16), yang setara dengan

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^n \left[\frac{(2k-1)^m(2k-1-\alpha)}{(1-\alpha)} - (2k-1) \right] (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| \\ & + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \frac{(2k-1)^m(2k-1-\alpha)}{(1-\alpha)} - \left[1 + \frac{(2n+1)^m(2n+1-\alpha)}{(n+1)(1-\alpha)}\right] (2k-1)^m \right\} \\ & (2k-1)^{m+1} |c_{2k-1}| \geq 0 \end{aligned}$$

pembuktian keputusan (7.24) telah lengkap.

Jika dipilih $m = 0$ dan $m = 1$ masing-masing dalam keputusan (7.23), akan diperoleh korolari-korolari berikut:

Korolari 7.6.8. *Andaikan H berbentuk (7.8) memenuhi syarat dalam (7.12), maka*

$$\text{Ny } \left\{ \frac{H'(0, z)}{H_n'(0, z)} \right\} \geq \frac{(2n+1-\alpha) - (n+1)(1-\alpha)}{(2n+1-\alpha)} = \frac{n(1+\alpha)}{2n+1-\alpha}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.27)$$

dan

$$\text{Ny } \left\{ \frac{H_n'(0, z)}{H'(0, z)} \right\} \geq \frac{2n+1-\alpha}{(2n+1-\alpha) + (n+1)(1-\alpha)} = \frac{2n+1-\alpha}{n(3-\alpha) + 2(1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.28)$$

Kesamaan (7.27) dan (7.28) akan diperoleh apabila fungsi diberi oleh

$$H(0, z) = z + \frac{1-\alpha}{(2n+1-\alpha)} z^{2n+1}.$$

Korolari 7.6.9. *Andaikan H berbentuk (7.8) memenuhi syarat dalam (7.12), maka*

$$\text{Ny } \left\{ \frac{H'(1,z)}{H_n'(1,z)} \right\} \geq \frac{(2n+1)(2n+1-\alpha)}{(2n+1)(2n+1-\alpha)+1-\alpha}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.29)$$

dan

$$\text{Ny } \left\{ \frac{H_n'(1,z)}{H'(1,z)} \right\} \geq \frac{(2n+1)(2n+1-\alpha)+1-\alpha}{(2n+1)(2n+1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{U}). \quad (7.30)$$

Kesamaan (7.29) dan (7.30) akan diperoleh apabila fungsi diberi oleh

$$H(1,z) = z + \frac{1-\alpha}{(2n+1)(2n+1-\alpha)} z^{2n+1}.$$



BAB VIII

SUBKELAS FUNGSI GANJIL p -VALEN DITAKRIFKAN MENGGUNAKAN PENGOPERASI SALAGEAN

Di dalam Bab ini, membicarakan beberapa sifat fungsi yang berada dalam kelas fungsi ganjil p -valen yang ditakrifkan menggunakan pengoperasi Salagean.

8.1 PENGENALAN

Katalah $A(p)$ dilambangkan sebagai kelas fungsi $f(z)$ yang diberikan oleh

$$f_p(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k, (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}) \quad (8.1)$$

yang analisis dalam cakera unit $z \in \mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$, dan ternormal dengan memenuhi syarat $f(0) = 0$ dan $f'(0) = 1$. Andaikan $T(p)$ subkelas bagi $A(p)$ yang mengandungi fungsi yang analisis dan p -valen dalam \mathbb{U} dengan fungsi pekali negatif berbentuk:

$$f_p(z) = z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| z^k. \quad (8.2)$$

Dapat diperhatikan bahawa $f \in A(1)$ merupakan fungsi analisis dan univalen dalam \mathbb{U} . Penjelmaan punca kuasa dua memberikan fungsi ganjil dan univalen

$$h(z) = \sqrt{f(z)} = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots = z + \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| z^k. \quad (8.3)$$

Seterusnya, andaikan $A_c(p)$ dalam kelas fungsi ganjil p -valen diberikan oleh

$$h_p(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} c_{2k-1} z^{2k-1}, (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}) \quad (8.4)$$

dan analisis dalam \mathbb{U} . Misalkan pula $T_c(p)$ bagi $A_c(p)$ adalah fungsi ganjil p -valen dengan pekali negatif dan analisis dalam \mathbb{U} ditulis sebagai

$$h_p(z) = z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| z^{2k-1}. \quad (8.5)$$

Andaikan $S^*(p, \alpha)$ dan $K(p, \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq p$ sebagai subkelas p -valen bak-bintang peringkat α dan p -valen cembung peringkat α , dengan

$$S^*(p, \alpha) = \left\{ h_p \in A_c(p) : \text{Ny} \left\{ \frac{zh'_p(z)}{h_p(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\} \quad (8.6)$$

dan

$$K(p, \alpha) = \left\{ h_p \in A_c(p) : \text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zh''_p(z)}{h'_p(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\}. \quad (8.7)$$

Andaikan pula $T^*(\alpha, p)$ dan $C(\alpha, p)$ sebagai subkelas $T_c(p)$ yang masing-masing adalah fungsi ganjil p -valen bak-bintang peringkat α dan univalen cembung peringkat α dengan pekali negatif diberikan oleh

$$T^*(\alpha) = \left\{ h_p \in T_c(p) : \text{Ny} \left\{ \frac{zh'_p(z)}{h_p(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\} \quad (8.8)$$

dan

$$C(\alpha) = \left\{ h_p \in T_c(p) : \text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zh''_p(z)}{h'_p(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{U} \right\}. \quad (8.9)$$

Bagi fungsi $f \in T(1)$ yang bak-bintang peringkat α dan cembung peringkat α , ($0 \leq \alpha \leq 1$) telah dikaji oleh Silverman (1975). Siregar dan Darus (2004) pula memperoleh hasil kajian bagi $f \in T(p)$ yang ditakrifkan menggunakan pengoperasian Salagean.

Menggunakan pendekatan yang sama dalam memperoleh (7.8), fungsi ganjil p -valen yang ditakrifkan menggunakan pengoperasi terbitan Salagean dapat ditulis sebagai

$$H_p(n, z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}. \quad (8.10)$$

Takrif 8.1.1. *Andaikan fungsi $h_p \in A_c(p)$, maka*

$$S_n(p, \alpha) = \left\{ h_p \in A_c(p) : \text{Ny} \left\{ \frac{D^{n+1}h'_p(z)}{D^n h_p(z)} - p \right\} > \alpha, (0 \leq \alpha \leq p) \text{ dan } n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (8.11)$$

Diketahui bahawa, $S_0(p, \alpha) = S^*(p, \alpha)$ dan $S_1(p, \alpha) = K(p, \alpha)$, dan masing-masing adalah

$$\frac{Dh'_p(z)}{h_p(z)} = \frac{zh'_p(z)}{h_p(z)} \text{ dan } \frac{D^2h'_p(z)}{Dh_p(z)} = \frac{z(zh'_p(z))'}{zh'_p(z)}. \quad (8.12)$$

Seterusnya, ditakrifkan $T_n(p, \alpha)$ adalah seperti berikut

Takrif 8.1.2. *Andaikan $h_p \in T_c(p)$, maka*

$$T_n(p, \alpha) = \left\{ h_p \in T_c(p) : \text{Ny} \left\{ \frac{D^{n+1}h'_p(z)}{D^n h_p(z)} - p \right\} > \alpha, (0 \leq \alpha \leq p) \text{ dan } n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (8.13)$$

Didapati bahawa, $T_0(p, \alpha) = T^*(p, \alpha)$ dan $T_1(p, \alpha) = C(p, \alpha)$. Oleh yang demikian $T_n(p, \alpha) \subset S_n(p, \alpha)$.

Kaedah kajian dimotivasikan oleh kaedah kajian yang dilakukan oleh Siregar dan Darus (2004).

8.2 PEKALI KETAKSAMAAN BAGI KELAS FUNGSI GANJIL p -VALEN SALAGEAN

Dalam bahagian ini kajian akan mendapatkan pekali ketaksamaan bagi kelas fungsi ganjil p -valen Salagean melibatkan pekali positif dan pekali negatif.

Berikut merupakan hasil pekali ketaksamaan bagi kelas fungsi ganjil p -valen Salagean melibatkan pekali positif.

Teorem 8.2.1. Katalah fungsi $h_p(z)$ diberi oleh (8.10), maka $h_p \in S_n(p, \alpha)$ jika dan hanya jika

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n \alpha] |c_{2k-1}| \leq p^n (p - \alpha).$$

Bukti. Untuk pembuktian teorem di atas, adalah memadai dengan menunjukkan bahawa

$$\left| \frac{D^{n+1}h_p(z)}{D^n h_p(z)} - p \right| \leq p - \alpha.$$

iaitu

$$\begin{aligned} & \left| \frac{D^{n+1}h_p(z)}{D^n h_p(z)} - p \right| = \left| \frac{D^{n+1}h_p(z) - pD^n h_p(z)}{D^n h_p(z)} \right| \\ &= \left| \frac{p^{n+1}z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^{n+1} c_{2k-1} z^{2k-1} - p \left(p^n z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1} \right)}{p^n z^n + \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^{n+1} c_{2k-1} z^{2k-1} - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}}{p^n z^n + \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n c_{2k-1} z^{2k-1}} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - p(2k-1)^n] |c_{2k-1}| |z|^{2k-1}}{p^n |z|^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| |z|^{2k-1}}, \quad |z| = 1 \\ &\leq \frac{\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - p(2k-1)^n] |c_{2k-1}|}{p^n - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}|}. \end{aligned}$$

Seterusnya,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq p^n (p - \alpha) \\ & \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - p(2k-1)^n + p(2k-1)^n - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq p^n (p - \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - p(2k-1)^n] |c_{2k-1}| &\leq p^n(p-\alpha) \\
&\quad - \sum_{k=p+1}^{\infty} [p(2k-1)^n + \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \\
\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - p(2k-1)^n] |c_{2k-1}| &\leq p^n(p-\alpha) \\
&\quad - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n(p-\alpha) |c_{2k-1}| \\
\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - p(2k-1)^n] |c_{2k-1}| &\leq (p-\alpha) \left[p^n - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| \right]
\end{aligned}$$

memberikan

$$\frac{\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - p(2k-1)^n] |c_{2k-1}|}{p^n - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}|} \leq p^n(p-\alpha).$$

Oleh itu diperoleh

$$\left| \frac{D^{n+1}h_p(z)}{D^n h_p(z)} - p \right| \leq p^n(p-\alpha).$$

Hasil yang diperoleh adalah sama dengan keputusan Siregar dan Darus (2004) dengan mempertimbangkan pekali-pekali ganjil.

Bila mengambil nilai $n = 0$ dan $n = 1$ dalam Teorem 8.2.1. Diperoleh korolari berikut:

Korolari 8.2.2. Katalah fungsi $h_p(z)$ diberi oleh (8.4), maka $h_p \in S^*(p, \alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} (2k-1-\alpha) |c_{2k-1}| \leq p-\alpha$.

Korolari 8.2.3. Katalah fungsi $h_p(z)$ diberi oleh (8.4), maka $h_p \in K(p, \alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^2 - \alpha(2k-1)] |c_{2k-1}| \leq p(p-\alpha)$.

Dengan memilih nilai $p = 1$, Korolari 8.2.2 dan 8.2.3 memberikan hasil bagi kasus univalen.

Seterusnya, diberikan hasil pekali ketaksamaan bagi kelas fungsi ganjil p -valen Salagean melibatkan pekali negatif.

Teorem 8.2.4. *Katalah fungsi $h_p(z)$ diberi oleh (8.10), maka $h_p \in T_n(p, \alpha)$ jika dan hanya jika*

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - (2k-1)^n \alpha] |c_{2k-1}| \leq p^n(p-\alpha).$$

Bukti. Dalam pembuktian Teorem 8.2.1, adalah memadai dengan hanya menunjukkan bahagian "jika" sahaja. Andaikan bahawa

$$\text{Ny} \left\{ \frac{D^{n+1}h_p(z)}{D^n h_p(z)} \right\} = \text{Ny} \left\{ \frac{p^{n+1}z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^{n+1} |c_{2k-1}| z^{2k-1}}{p^n z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| z^{2k-1}} \right\} > \alpha.$$

Pilih nilai pada paksi nyata z , sehingga $\frac{D^{n+1}h_p(z)}{D^n h_p(z)}$ adalah nyata.

Andaikan $z \rightarrow 1^-$ sepanjang paksi nyata, diperoleh

$$\begin{aligned} p^{n+1} - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^{n+1} |c_{2k-1}| &\geq \alpha \left[p^n - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^n |c_{2k-1}| \right] \\ - \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)^{n+1} |c_{2k-1}| + \sum_{k=p+1}^{\infty} \alpha (2k-1)^n |c_{2k-1}| &\geq -p^n(p-\alpha) \\ - \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| &\geq -p^n(p-\alpha). \end{aligned}$$

Oleh itu, diperoleh

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] |c_{2k-1}| \leq p^n(p-\alpha).$$

Didapati hasil yang diperoleh adalah sepadan dengan hasil Siregar dan Darus (2004) dengan mempertimbangkan hasil bagi pekali-pekali ganjil. Apabila $n = 0$ dan $n = 1$, Teorem 8.2.4 memberikan Korolari 8.2.5 dan Korolari 8.2.6 seperti berikut:

Korolari 8.2.5. *Katalah fungsi $h_p(z)$ diberikan oleh (8.10), maka $h_p \in T^*(p, \alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} (2k-1-\alpha) |c_{2k-1}| \leq p-\alpha$.*

Korolari 8.2.6. *Katalah fungsi $h_p(z)$ diberikan oleh (8.10), maka $h_p \in C(p, \alpha)$ jika dan hanya jika $\sum_{k=2}^{\infty} [(2k-1)^2 - \alpha(2k-1)] |c_{2k-1}| \leq p(p-\alpha)$.*

Apabila $p = 1$, Korolari 8.2.5 dan 8.2.6 memberikan hasil kasus univalen.

8.3 TEOREM PERTUMBUHAN DAN HEROTAN BAGI KELAS FUNGSI GANJIL SALAGEAN P -VALEN DENGAN PEKALI NEGATIF

Berikut diberikan hasil bagi teorem pertumbuhan dan herotan bagi kelas fungsi ganjil Salagean p -valen dengan pekali negatif.

Teorem 8.3.1. *Jika fungsi $h_p(z)$ diberikan oleh (8.10) adalah unsur kelas $T_n(p, \alpha)$ untuk $0 < |z| = r < 1$, maka*

$$r^p - \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - (2p + 1)^n \alpha]} r^{2p+1} \leq |h_p(z)| \leq r^p + \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - (2p + 1)^n \alpha]} r^{2p+1}$$

dengan kesamaan diperoleh apabila h diberi oleh

$$h_p(z) = r^p - \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - (2p + 1)^n \alpha]} r^{2p+1} \quad (z = \pm r).$$

Bukti. Daripada Teorem 8.2.4,

$$[(2p + 1)^{n+1} - \alpha(2p + 1)^n] \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k - 1)^{n+1} - \alpha(2k - 1)^n] |c_{2k-1}| \leq p^n(p - \alpha).$$

Seterusnya, memberikan

$$|c_{2k-1}| \leq \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2k - 1)^{n+1} - \alpha(2k - 1)^n]}.$$

Bagi $k = p + 1$, diperoleh

$$|c_{2p+1}| \leq \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - \alpha(2p + 1)^n]}.$$

Oleh itu

$$\begin{aligned}
 |h_p(z)| &\leq \left| z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| |z^{2k-1}| \right|, \quad (|z| = r), \\
 &\leq r^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| r^{2k-1} \\
 &\leq r^p + |c_{2p+1}| r^{2p+1} \\
 &\leq r^p + \frac{p^n(p-\alpha)}{[(2p+1)^{n+1} - \alpha(2p+1)^n]} r^{2p+1},
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 |h_p(z)| &= z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| |z^{2k-1}|, \quad (|z| = r), \\
 &\geq r^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| r^{2k-1} \\
 &\geq r^p - |c_{2p+1}| r^{2p+1} \\
 &\geq r^p - \frac{p^n(p-\alpha)}{[(2p+1)^{n+1} - \alpha(2p+1)^n]} r^{2p+1}.
 \end{aligned}$$

Jadi, didapati bahawa

$$r^p - \frac{p^n(p-\alpha)}{[(2p+1)^{n+1} - \alpha(2p+1)^n]} r^{2p+1} \leq |h_p(z)| \leq r^p + \frac{p^n(p-\alpha)}{[(2p+1)^{n+1} - \alpha(2p+1)^n]} r^{2p+1}.$$

Jika $n = 0$ dan $n = 1$ dalam Teorem 8.3.1, maka diperoleh korolari berikut:

Korolari 8.3.2. Jika fungsi h_p ditakrifkan seperti (8.10), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h_p \in T^*(p, \alpha)$ jika dan hanya jika

$$r^p - \frac{p-\alpha}{(2p+1-\alpha)} r^{2p+1} \leq |h_p(z)| \leq r^p + \frac{p-\alpha}{(2p+1-\alpha)} r^{2p+1}.$$

Korolari 8.3.3. Jika fungsi h_p ditakrifkan seperti (8.10), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h \in K(p, \alpha)$ jika dan hanya jika

$$r^p - \frac{p(p-\alpha)}{[(2p+1)^2 - (2p+1)\alpha]} r^{2p+1} \leq |h_p(z)| \leq r^p + \frac{p(p-\alpha)}{[(2p+1)^2 - (2p+1)\alpha]} r^{2p+1}.$$

Manakala, untuk $p = 1$ dalam Korolari 8.3.2 dan Korolari 8.3.3 diperoleh Korolari bagi kasus univalen.

Seterusnya, diberikan hasil berikut,

Teorem 8.3.4. *Cakera $|z| < 1$ adalah dipetakan pada domain yang mengandungi cakera*

$$|w| < 1 - \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - (2p + 1)^n \alpha]}$$

oleh fungsi $h_p \in T_n(p, \alpha)$.

Bukti. Untuk pembuktian Teorem ini, adalah cukup dengan mengandaikan $r \rightarrow 1$ dan $h_p(z) = w$.

Bila $n = 0$ dan $n = 1$, Teorem 8.3.4 mengimplikasikan Korolari berikut:

Korolari 8.3.5. *Cakera $|z| < 1$ adalah dipetakan pada suatu domain yang mengandungi cakera $|w| \leq \frac{p}{2p+1-\alpha}$ oleh fungsi $h_p \in T^*(p, \alpha)$ dan cakera $|w| \leq 1 - \frac{p(p-\alpha)}{(2p+1)(2p+1-\alpha)}$ oleh fungsi $h_p \in C(p, \alpha)$.*

Apabila $p = 1$, diperoleh korolari bagi kasus univalen.

Diberikan juga hasil berikut,

Teorem 8.3.6. *Jika fungsi $h_p(z)$ diberi oleh (8.10) adalah unsur kelas $T(p, \alpha)$ for $0 < |z| = r < 1$, maka bagi $|z| = r$,*

$$pr^{p-1} - \frac{(2p+1)p^n(p-\alpha)}{[(2p+1)^n - \alpha(2p+1)^{n-1}]} r^{2p} \leq |h'_p(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{(2p+1)p^n(p-\alpha)}{[(2p+1)^n - \alpha(2p+1)^{n-1}]} r^{2p}.$$

Bukti. Diketahui bahawa

$$|h'_p(z)| \leq p|z|^{p-1} + \sum_{k=p+1}^{\infty} (2k-1)|c_{2k-1}||z|^{2k-2} \leq pr^{p-1} + (2p+1)r^{2p} \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}|.$$

Daripada pembuktian Teorem 8.2.1, dapat ditunjukkan bagi $k = p + 1$,

$$|c_{2p+1}| \leq \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - \alpha(2p + 1)^n]}.$$

Oleh itu,

$$\begin{aligned} |h'_p(z)| &\leq \left| pz^{p-1} + (2k-1) \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| |z|^{2k-2} \right|, \quad (|z| = r), \\ &\leq pr^{p-1} + (2k-1) \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| r^{2k-2} \\ &\leq pr^{p-1} + (2p+1) |c_{2p+1}| r^{2p}; k = p+1 \\ &\leq pr^{p-1} + (2p+1) \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - \alpha(2p + 1)^n]} r^{2p+1} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |h'_p(z)| &= \left| pz^{p-1} - (2k-1) \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| |z|^{2k-2} \right|, \quad (|z| = r), \\ &\geq pr^{p-1} - (2k-1) \sum_{k=p+1}^{\infty} |c_{2k-1}| r^{2k-2} \\ &\geq pr^{p-1} - (2p+1) |c_{2p+1}| r^{2p}; k = p+1 \\ &\geq pr^{p-1} - (2p+1) \frac{p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - \alpha(2p + 1)^n]} r^{2p}. \end{aligned}$$

Oleh yang demikian, diperoleh

$$pr^{p-1} - \frac{(2p+1)p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - \alpha(2p + 1)^n]} r^{2p} \leq |h'_p(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{(2p+1)p^n(p - \alpha)}{[(2p + 1)^{n+1} - \alpha(2p + 1)^n]} r^{2p}.$$

Apabila $n = 0$ dan $n = 1$, Teorem 8.3.6 memberikan korolari berikut:

Korolari 8.3.7. *Jika fungsi h_p diberi oleh (8.10), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h_p \in T^*(p, \alpha)$ jika dan hanya jika*

$$pr^{p-1} - \frac{(2p+1)(p - \alpha)}{[1 - \alpha(2p + 1)^{-1}]} r^{2p} \leq |h'_p(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{(2p+1)(p - \alpha)}{[1 - \alpha(2p + 1)^{-1}]} r^{2p}.$$

Korolari 8.3.8. *Jika fungsi h_p diberi oleh (8.10), untuk $0 < |z| = r < 1$, maka $h_p \in$*

$K(p, \alpha)$ jika dan hanya jika

$$pr^{p-1} - \frac{(2p+1)p(p-\alpha)}{[(2p+1)-\alpha]}r^{2p} \leq |h'_p(z)| \leq pr^{p-1} + \frac{(2p+1)p(p-\alpha)}{[(2p+1)-\alpha]}r^{2p}.$$

Dengan mengambil nilai $p = 1$ dalam Korolari 8.3.7 dan Korolari 8.3.8 diperoleh hasil korolari untuk kasus univalen.

8.4 KOMBINASI LINEAR CEMBUNG BAGI KELAS FUNGSI GANJIL SALAGEAN P -VALEN DENGAN PEKALI NEGATIF

Berikutnya, dilihat pula kombinasi linear cembung bagi kelas fungsi ganjil Salagean p -valen dengan pekali negatif.

Teorem 8.4.1. *Jika h_p diberi oleh (8.10) unsur dalam kelas $T_n(p, \alpha)$. Maka kelas $T_n(p, \alpha)$ adalah tertutup dengan kombinasi linear cembung.*

Bukti. Katalah fungsi h_p dan g_p masing-masing ditakrifkan seperti berikut

$$h_p(z) = z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} c_{2k-1}z^{2k-1}, \quad (c_{2k-1} \geq 0)$$

dan

$$g_p(z) = z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} b_{2k-1}z^{2k-1}, \quad (b_{2k-1} \geq 0).$$

Andaikan bahawa h_p dan g_p berada dalam kelas $T_n(p, \alpha)$, adalah memadai dengan membuktikan $G_p(z)$ yang ditakrifkan sebagai

$$G_p(z) = (1 - \lambda)h_p(z) + \lambda g_p(z) = z^p - \sum_{k=p+1}^{\infty} d_{2k-1}z^{2k-1}, \quad (d_{2k-1} \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1).$$

juga berada dalam kelas $T_n(p, \alpha)$.

Daripada

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n]c_{2k-1} \leq p^n(p-\alpha)$$

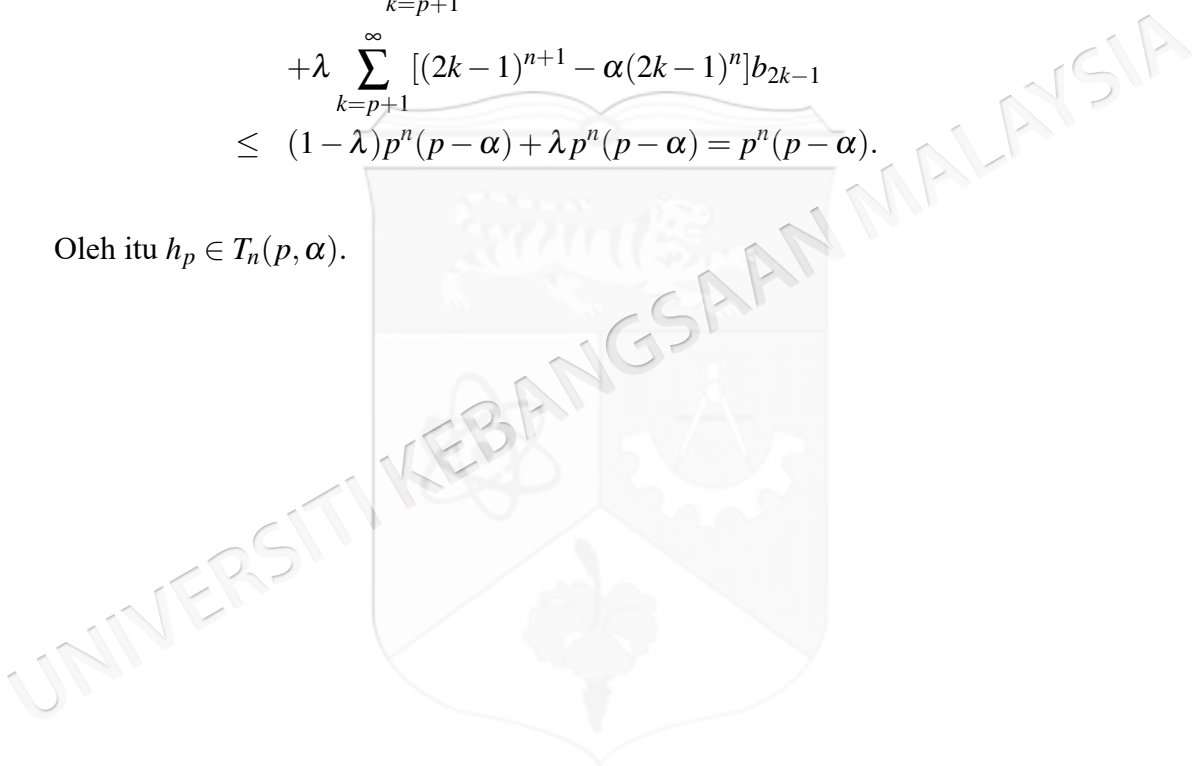
dan

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] b_{2k-1} \leq p^n(p-\alpha).$$

Maka daripada Teorem 8.2.1, dapat dilihat bahawa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] d_{2k-1} \\ = & \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] [(1-\lambda)c_{2k-1} + \lambda b_{2k-1}] \\ = & (1-\lambda) \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] c_{2k-1} \\ & + \lambda \sum_{k=p+1}^{\infty} [(2k-1)^{n+1} - \alpha(2k-1)^n] b_{2k-1} \\ \leq & (1-\lambda)p^n(p-\alpha) + \lambda p^n(p-\alpha) = p^n(p-\alpha). \end{aligned}$$

Oleh itu $h_p \in T_n(p, \alpha)$.



BAB IX

PENGOPERASI KAMIRAN TERITLAK BAGI FUNGSI p -VALEN DALAM PENGERTIAN FUNGSI BAK-BINTANG JANOWSKI

9.1 PENDAHULUAN

Kata $A(p)$ seperti dalam (8.1) merupakan kelas fungsi p -valen yang analisis dalam cakera unit $z \in \mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$. Fungsi $f \in A(p)$ dikatakan p -valen bak-bintang berperingkat β , ($0 < \beta < p$), ditulis $S^*(p, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\text{Ny} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (9.1)$$

Disamping itu, fungsi $f \in A(p)$ dikatakan p -valen cembung berperingkat β ($0 \leq \beta \leq p$) di tulis $C(p, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \beta, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (9.2)$$

Tambahan lagi, fungsi $f \in A(p)$ dikatakan subkelas bagi p -valen hampir cembung berperingkat β ($0 \leq \beta \leq p$) ditulis $K(p, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\text{Ny} \left\{ \frac{zf'(z)}{z^{p-1}} \right\} > \beta, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (9.3)$$

Diperhatikan bahawa $S(p, 0) = S_p^*$, $C(p, 0) = C_p^*$ dan $K(p, 0) = K_p^*$ masing-masing ialah p -valen bak-bintang, p -valen cembung dan p -valen hampir cembung dalam \mathbb{U} .

Ditulis juga $S_1^* = S^*$, $C_1^* = C^*$ dan $K_1^* = K^*$ masing-masing merupakan kelas bak-bintang, cembung dan hampir cembung dalam \mathbb{U} .

Fungsi $f \in A(P)$ dikatakan p -valen bak-bintang seragam berperingkat β , $(-1 < \beta < p)$ dalam \mathbb{U} , ditulis $US(p, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} - \beta \right\} > \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right|, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (9.4)$$

Fungsi p -valen bak-bintang seragam ini telah diperkenalkan oleh Goodman (1991).

Lihat pula, fungsi $f \in A(P)$ dikatakan p -valen hampir cembung seragam berperingkat β $(0 \leq \beta \leq p)$ dalam \mathbb{U} , di tulis $UK(p, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} - \beta \right\} > \left| \frac{zf'(z)}{g(z)} - p \right|, \quad z \in \mathbb{U}, \quad (9.5)$$

bagi $g(z) \in US(p, \beta)$.

9.2 KELAS FUNGSI CARATHEODORY DAN KELAS FUNGSI JANOWSKI

Katalah $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$ analisis dalam \mathbb{U} dan memenuhi sifat $p(0) = 1$, $\operatorname{Ny} \{p(z)\} > 0$, maka p adalah fungsi *Caratheodory*. Kelas fungsi ini dilambangkan dengan P . Apabila prinsip subordinasi digunakan, didapati bahawa

$$p(z) \in P \quad \text{jika dan hanya jika} \quad p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}. \quad (9.6)$$

Andaikan $p(z) = 1 + b_1z + b_2z^2 + \dots$ teratur dan analisis dalam \mathbb{U} dan memenuhi sifat

$$p(0) = 1, \quad \operatorname{Ny} \{p(z)\} > 0, \quad p(z) \prec \frac{1+Az}{1-Bz}; \quad (-1 < A < 1, -1 \leq B < A). \quad (9.7)$$

Maka fungsi p dinamakan fungsi *Janowski*. Kelas fungsi ini dilambangkan dengan $P(A, B)$. Secara geometrinya, fungsi p berada dalam $P(A, B)$ jika dan hanya jika $p(0) = 1$ dan $p(\mathbb{U})$ berada dalam cakera terbuka berpusat pada paksi nyata dengan diameter titik akhirnya ialah

$$p(-1) = \frac{1-A}{1-B} \quad \text{dan} \quad p(1) = \frac{1+A}{1+B}.$$

Andaikan $H(\mathbb{U})$ kelas bagi fungsi analisis dalam cakera unit terbuka $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ dan $S = \{f \in H(\mathbb{U}) : f(0) = f'(0) - 1\}$.

Juga, andaikan α nombor nyata, ($0 < \alpha \leq 1$) dan ditakrifkan bahawa $f \in S^*(\alpha)$ jika

$$\left| \frac{\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1}{\frac{zf'(z)}{f(z)} + 1} \right| < \alpha, \quad z \in \mathbb{U}, \quad (9.8)$$

yang $S^*(1) = \{f \in H(\mathbb{U}) : f(0) = f'(0) - 1\}$ dan $S^*(0)$ adalah kelas fungsi bak bintang yang berpusat di asalan.

Penerangan dan contoh pilihan khusus melibatkan kelas fungsi Janowski dan kelas fungsi bak bintang Janowski boleh dilihat di Siregar dan Darus (2008).

9.3 PENGOPERASI KAMIRAN TERITLAK

Dalam bab ini juga akan dibincangkan tentang pengoperasi kamiran yang diberikan seperti berikut:

Bagi $\alpha_m > 0$ dan $f_m \in A(P)$, ditakrifkan menggunakan pengoperasi kamiran teritlak.

$$F_p(z) = \int_0^z pt^{p-1} \left(\frac{f_1(t)}{t^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(t)}{t^p} \right)^{\alpha_n} dt \quad (9.9)$$

Jika $p = 1$, diperoleh pengoperasi kamiran teritlak $F_1(z) = F_n(z)$ yang telah dikaji oleh Breaz dan Breaz (2002) juga Breaz, Owa dan Breaz (2008).

Begitu juga bagi nilai $p = n = 1, \alpha_1 = \alpha \in [0, 1]$ dalam (9.9), akan diperoleh pengoperasian $\int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t^p} \right)^\alpha$ yang dikaji oleh Miller, Mocanu dan Reade (1978).

Dalam kajian ini diterbitkan syarat cukup yang perlu bagi pengoperasi p -valen bak-bintang dan p -valen hampir cembung seragam dalam \mathbb{U} .

Bagi pembuktian hasil utama, beberapa lema daripada kajian terdahulu diberikan.

9.4 HASIL KAJIAN TERDAHULU

Hasil kajian terdahulu yang diperlukan dalam pembuktian bagi mendapatkan hasil utama diberikan seperti berikut:

Lema 9.4.1. (Nunokawa 1989) Jika $f \in A(p)$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} < p + \frac{1}{4}; \quad z \in \mathbb{U}, \quad (9.10)$$

maka f adalah p -valen bak bintang dalam \mathbb{U} .

Lema 9.4.2. (Raina dan Bapna 2004) Jika $f \in A(p)$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} < p + \frac{a+b}{(1+a)(1-b)}, \quad z \in \mathbb{U}, \quad (9.11)$$

yang $a > 0, b \geq 0$ and $a + 2b = 1$, maka F_p yang diberikan oleh (9.9) adalah p -valen hampir cembung dalam \mathbb{U} .

Lema 9.4.3. (Al-Kharsani dan Al-Hajiry 2008) Jika $f \in A(p)$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} < p + \frac{1}{3}, \quad z \in \mathbb{U}, \quad (9.12)$$

maka f adalah p -valen hampir cembung dalam \mathbb{U} .

Lema 9.4.4. (Owa 1990) Jika $f \in A(p)$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \frac{p}{4} - 1, \quad z \in \mathbb{U}, \quad (9.13)$$

maka

$$\text{Ny} \left\{ \sqrt{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}} \right\} > \frac{\sqrt{p}}{2}, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (9.14)$$

9.5 HASIL UTAMA

Dalam bahagian ini diberikan hasil utama kajian dalam ini yang didorong oleh kajian yang dilakukan oleh Frasin (2009).

Dimulakan dengan hasil bagi syarat cukup bagi pengoperasian F_p yang diberikan oleh (9.9) berada dalam dalam S_p^* .

Teorem 9.5.1. Misalkan $\alpha_m > 0$ adalah nombor nyata bagi $m = 1, 2, \dots, n$. Jika $f_m \in A(p)$ bagi semua $m = 1, 2, \dots, n$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_i(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{1 - 4(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{1 + 4(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}, \quad z \in \mathbb{U}. \quad (9.15)$$

Maka F_p yang diberikan oleh (9.9) ialah p -valen bak-bintang dalam \mathbb{U} .

Bukti.

Daripada Takrifan 6.1.8, diperhatikan bahawa $F_p(z) \in A(p)$.

$$F_p(z) = \int_0^z pt^{p-1} \left(\frac{f_1(t)}{t^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(t)}{t^p} \right)^{\alpha_n} dt.$$

Seterusnya, dengan mudah diperoleh

$$F'_p(z) = pz^{p-1} \left(\frac{f_1(z)}{z^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z^p} \right)^{\alpha_n}. \quad (9.16)$$

Dengan operasi pembezaan pada (9.16) menggunakan petua darab, F''_p diterbitkan

$$u = pz^{p-1}; \quad u' = (p-1)pz^{p-2}$$

dan

$$v = (f_1(z)z^{-p})^{\alpha_1}; \quad v' = \alpha_1(f_1(z)z^{-p})^{\alpha_1-1}(f_1(z)z^{-p} - pz^{-p-1}f_1(z)).$$

Oleh itu,

$$F''_p(z) = (p-1)pz^{p-2} \left[\left(\frac{f_1(z)}{z^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z^p} \right)^{\alpha_n} \right] + pz^{p-2} \left[\alpha_1(f_1(z)z^{-p})^{\alpha_1-1}(f_1(z)z^{-p} - pz^{-p-1}f_1(z)) \right].$$

Dengan mendarabkan F_p'' dengan z , diperoleh

$$zF_p''(z) = (p-1)pz^{p-1} \left[\left(\frac{f_1(z)}{z^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z^p} \right)^{\alpha_n} \right] \\ + pz^{p-1} \left[\alpha_1 (f_1(z)z^{-p})^{\alpha_1-1} (f_1(z)z^{-p} - pz^{-p-1}f_1(z)) \right].$$

Seterusnya, dibahagikan dengan (9.16), memberikan

$$\frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} = \frac{(p-1)pz^{p-1} \left[\left(\frac{f_1(z)}{z^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z^p} \right)^{\alpha_n} \right]}{pz^{p-1} \left(\frac{f_1(z)}{z^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z^p} \right)^{\alpha_n}} \\ + \frac{pz^{p-1} \left[\alpha_1 (f_1(z)z^{-p})^{\alpha_1-1} (f_1(z)z^{-p} - pz^{-p-1}f_1(z)) \right]}{pz^{p-1} \left(\frac{f_1(z)}{z^p} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_n(z)}{z^p} \right)^{\alpha_n}}.$$

Oleh itu,

$$\frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} = (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - p \right).$$

Bagi mendapatkan fungsi Janowski, langkah berikut dilakukan

$$\begin{aligned} \frac{zF_p''}{F_p'(z)} &= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - p \right) \\ &= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - \sum_{m=1}^n \alpha_m p \\ &= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - \sum_{m=1}^n \alpha_m + \sum_{m=1}^n \alpha_m - \sum_{m=1}^n \alpha_m p \\ &= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - 1 \right) + \sum_{m=1}^n \alpha_m (1-p) \\ &= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - 1 \right) + \sum_{m=1}^n \alpha_m (1-p) \\ 1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} &= p + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - 1 \right) + \sum_{m=1}^n \alpha_m (1-p). \end{aligned}$$

Oleh itu diperoleh,

$$\left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - 1 \right) = \frac{1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} - p - (1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad (9.17)$$

Dengan menggunakan pendekatan yang sama, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} &= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - p \right) \\
&= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - \sum_{m=1}^n \alpha_m p \\
&= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} + \sum_{m=1}^n \alpha_m - \sum_{m=1}^n \alpha_m - \sum_{m=1}^n \alpha_m p \\
&= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} + 1 \right) + \sum_{m=1}^n \alpha_m (-1 - p) \\
&= (p-1) + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} + 1 \right) - \sum_{m=1}^n \alpha_m (1 + p) \\
1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} &= p + \sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} + 1 \right) - \sum_{m=1}^n \alpha_m (1 + p).
\end{aligned}$$

Maka,

$$\left(\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} + 1 \right) = \frac{1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} - p + (1+p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad (9.18)$$

Seterusnya dibahagikan antara (9.17) dan (9.18), dan diambil bahagian nyata bagi kedua-dua bahagian, diperoleh

$$\begin{aligned}
\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} &= \text{Ny} \left\{ \frac{\frac{1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} - p - (1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\sum_{m=1}^n \alpha_m}}{\frac{1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} - p + (1+p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\sum_{m=1}^n \alpha_m}} \right\} \\
&= \frac{\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} \right\} - p - (1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\sum_{m=1}^n \alpha_m} \\
&= \frac{\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} \right\} - p + (1+p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\sum_{m=1}^n \alpha_m} \\
&= \frac{\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} \right\} - p - (1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{zF_p''(z)}{F_p'(z)} \right\} - p + (1+p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad (9.19)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lema 9.4.1, persamaan (9.19) boleh tulis sebagai

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf_m'(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{(p + \frac{1}{4}) - p - (1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{(p + \frac{1}{4}) - p + (1+p) \sum_{m=1}^n \alpha_m} \quad (9.20)$$

dan diperoleh

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{1 - 4(1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{1 + 4(1+p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad (9.21)$$

Oleh itu, dengan menggunakan Lema 9.4.1, pembuktian Teorem 9.5.1 telah lengkap.

Dengan mengambil nilai-nilai $n = p = 1, \alpha_1 = \alpha$ dan $f_1 = f$ ke dalam Teorem 9.5.1 diperoleh korolari berikut:

Korolari 9.5.2. Jika $f \in A(p)$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{1}{1 + 8\alpha}, \quad (9.22)$$

yang $\alpha > 0$. Maka $\int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\alpha dt$ bak-bintang dalam \mathbb{U} .

Seterusnya diberi teorem yang menunjukkan F_p ialah p -valen hampir cembung dalam \mathbb{U} .

Teorem 9.5.3. Misalkan $\alpha_m > 0$ adalah nombor nyata bagi $m = 1, 2, \dots, n$. Jika $f_m \in A(p)$ bagi semua $m = 1, 2, \dots, n$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{(a+b) - [(1+a)(1-b)](1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{(a+b) + [(1+a)(1-b)](1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}, \quad z \in \mathbb{U}.$$

dengan $a > 0, b \geq 0$ dan $a + 2b = 1$, maka F_p ialah p -valen hampir cembung dalam \mathbb{U} .

Bukti.

Dengan menggunakan Lema 9.4.2 kedalam (9.19), diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} &< \frac{\left(p + \frac{a+b}{(1+a)(1-b)}\right) - p - (1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{\left(p + \frac{a+b}{(1+a)(1-b)}\right) - p - (1+p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}, \quad z \in \mathbb{U}. \\ &= \frac{(a+b) - [(1+a)(1-b)](1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}{(a+b) + [(1+a)(1-b)](1-p) \sum_{m=1}^n \alpha_m}, \quad z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

Oleh itu, $F_p \in C_p(\beta)$. Ini melengkapkan terbitan ini.

Dengan mengambil nilai-nilai $n = p = 1, \alpha_1 = \alpha$ dan $f_1 = f$ ke dalam Teorem 9.5.3 diperoleh korolari berikut

Korolari 9.5.4. *Jika $f \in A(p)$ memenuhi*

$$\text{Ny } \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{a+b}{(a+b) + 2[(1+a)(1-b)]\alpha} \quad (9.23)$$

dengan $a > 0, b \geq 0$ dan $a + 2b = 1$, maka $\int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\alpha dt$ ialah hampir cembung dalam \mathbb{U} .

Berikutnya, diberi teorem yang menunjukkan F_p ialah p -valen hampir cembung seragam dalam \mathbb{U} .

Teorem 9.5.5. *Misalkan $\alpha_m > 0$ adalah nombor nyata bagi $m = 1, 2, \dots, n$. Jika $f_m \in A(p)$ bagi semua $m = 1, 2, \dots, n$. Memenuhi*

$$\text{Ny } \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{1 - 3(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{1 + 3(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad z \in \mathbb{U}.$$

maka F_p ialah p -valen hampir cembung seragam dalam \mathbb{U} .

Bukti.

Dengan menggunakan fungsi Janowski dalam (9.19) dan Lema 9.4.3, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Ny } \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} &< \frac{(p + \frac{1}{3}) - p - (1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{(p + \frac{1}{3}) - p + (1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}, \quad z \in \mathbb{U}, \\ &= \frac{(3p+1) - 3p - 3(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{(3p+1) - 3p + 3(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad z \in \mathbb{U} \\ &= \frac{1 - 3(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{1 + 3(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

Ini melengkapkan pembuktian Teorem 9.5.5.

Dengan mengambil nilai-nilai $n = p = 1, \alpha_1 = \alpha$ dan $f_1 = f$ ke dalam Teorem 9.5.5 diperoleh korolari berikut:

Korolari 9.5.6. Jika $f \in A(p)$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} < \frac{1}{1+6\alpha}, \quad z \in \mathbb{U}, \quad (9.24)$$

dengan $\alpha > 0$, maka $\int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\alpha dt$ ialah p -valen hampir cembung seragam dalam \mathbb{U} .

Teorem 9.5.7. Misalkan $\alpha_m > 0$ adalah nombor nyata bagi $m = 1, 2, \dots, n$. Jika $f_m \in A(p)$ bagi semua $m = 1, 2, \dots, n$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} > \frac{1 + 4(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{1 - 4(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad z \in \mathbb{U}.$$

maka F_p ialah p -valen hampir cembung seragam dalam \mathbb{U} .

Bukti.

Dengan menggunakan fungsi Janowski dalam (9.19) dan Lema 9.4.4, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} &\geq \frac{\left(\frac{p}{4} - 1\right) - p - (1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{\left(\frac{p}{4} - 1\right) - p + (1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}, \quad z \in \mathbb{U}, \\ &= \frac{(4p-1) - 4p - 4(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{(4p-1) - 4p + 4(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad z \in \mathbb{U} \\ &= \frac{-1 - 4(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{-1 + 4(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad z \in \mathbb{U}. \\ &= \frac{1 + 4(1-p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}{1 - 4(1+p)\sum_{m=1}^n \alpha_m}. \quad z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

Ini melengkapkan pembuktian Teorem 9.5.7.

Dengan mengambil nilai-nilai $n = p = 1, \alpha_1 = \alpha$ dan $f_1 = f$ ke dalam Teorem 9.5.5 diperoleh korolari berikut:

Korolari 9.5.8. Jika $f \in A(p)$ memenuhi

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} - 1}{\frac{zf'_m(z)}{f_m(z)} + 1} \right\} > \frac{1}{1-8\alpha}. \quad z \in \mathbb{U}. \quad (9.25)$$

dengan $\alpha > 0$, maka $\int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\alpha dt$ ialah p -valen hampir cembung seragam dalam \mathbb{U} .

Banyak lagi, subkelas p -valen melibatkan fungsi bak-bintang dalam pengertian Janowski. Dalam kajian ini telah dibincangkan syarat cukup bagi pengoperasian kamiran F_p dalam bentuk fungsi bak-bintang Janowski dalam cakera terbuka \mathbb{U} .



BAB X

KELAS FUNGSI BAK BINTANG TERITLAK JENIS KOEBE PERINGKAT KOMPLEKS

10.1 PENDAHULUAN

Perbincangan dalam bab ini adalah untuk mendapatkan syarat bagi kebakbintangan kelas fungsi yang analisis jenis Koebe berperingkat kompleks.

Andaikan A kelas fungsi analisis ternormalkan seperti dalam (1.2) yang analisis dalam cakera unit \mathbb{U} . Seterusnya, S^* dan C masing-masing merupakan kelas fungsi bak bintang dan fungsi cembung dalam \mathbb{U} .

Ungkapan $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ dan $\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$ memainkan peranan penting dalam teori fungsi univalen. Beberapa kelas baru telah diperkenalkan dan dikaji oleh ramai penyelidik dengan menggabungkan ungkapan-ungkapan ini dalam bentuk-bentuk yang berbeza.

Kelas $M(\alpha)$ pertama kali diperkenalkan oleh (Mocanu 1969) yang menggelarkannya sebagai kelas fungsi α cembung (atau α bak-bintang).

$$M(\alpha) = \left\{ f(z) \in A : \operatorname{Re} \left\{ (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right\} > 0 \right\}.$$

Kemudian (Miller 1973) membuktikan bahawa $M(\alpha)$ adalah subkelas S^* untuk setiap nombor nyata α dan $M(\alpha)$ juga adalah subkelas K untuk $\alpha \geq 1$. Diperhatikan bahawa $M(0) = S^*$ merupakan fungsi bak bintang dan $M(1) = C$ adalah fungsi cembung.

10.2 KELAS FUNGSI BAB BINTANG TERITLAK JENIS KOEBE PERINGKAT KOMPLEKS

Kajian fungsi jenis Koebe ini telah diinspirasi oleh kajian yang terdahulu, dan tujuannya adalah untuk mendapatkan syarat cukup untuk fungsi kebakbintangan simetri lipatan ke- m jenis Koebe f_b , yang ditakrifkan oleh

$$f_b(z) := \frac{z}{(1-z^n)^b}, \quad (b \geq 0; n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}) \quad (10.1)$$

dan secara jelasnya merupakan kelas fungsi Koebe apabila $n = 1$ and $b = 2$.

Dalam bahagian ini, akan dibincangkan kelas fungsi $M(\alpha, \lambda, \beta, \eta)_b$ yang merupakan unsur kepada kelas fungsi $f \in A$, untuk $\alpha \geq 0$, $\lambda > 0$, $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ dan $z \in \mathbb{U}$, iaitu

Takrif 10.2.1. Fungsi f seperti ditakrifkan oleh (1.2). Maka $f \in M(\alpha, \lambda, \beta, \eta)_b$ jika dan hanya jika

$$M(\alpha, \lambda, \beta, \eta)_b = \left\{ f(z) \in A : \operatorname{Ny} \left\{ \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right] \right\} > 0 \right\}. \quad (10.2)$$

Dengan mengambil nilai-nilai tertentu bagi parameter α, λ, β dan η , diperoleh hubungan seperti berikut dan kaitannya dengan kajian-kajian terdahulu

- $M(0, \lambda, 0, 0) \subset S^*(0)$;
- $M(\alpha, 1, 0, 0) \subset H(\alpha) \subset S^*$ which $H(\alpha)$, diperkenalkan oleh Fukui, Owa dan Sakaguchi (1992);
- $M(1, 0, 0, 0) = H(1) \subset S^*(1/2)$, dikaji oleh Ramesha, Kumar dan Padmanabhan (1995);
- $M(1, 0, 0, 0) = H(1) \subset S^*(\gamma)$ dengan $\gamma < 1/2$, telah diselidik oleh Nunokawa et al. (1996);

- $M(\alpha, 0, 0, 0) = H(\alpha) \subset S^*$, dibincang oleh Kamali dan Srivastava (2004);
- $M(\alpha, \lambda, 0, 0) = H(\alpha) \subset S^*$, dikaji oleh Siregar dan Darus (2011);
- $M(\alpha, 0, \beta, 0) = H(\alpha, \beta) \subset S^*$, dikaji oleh Siregar (2011);

Dalam bab ini perbincangan akan menumpu kepada subordinasi, superordinasi, dominan terbaik, teorem sandwic dan syarat cukup bagi kebakbintangan fungsi jenis Koebe $M(\alpha, \lambda, \beta, \eta)_b$ dan penggunaannya. Kajian ini dimotivasikan oleh Kamali dan Srivastava (2004), Siregar dan Darus (2011) dan Siregar (2011).

10.3 HASIL KAJIAN TERDAHULU

Diberikan lema-lema yang akan digunakan bagi memperoleh hasil utama seperti berikut:

Lema 10.3.1. (Miller dan Mocanu 1985) Andaikan fungsi $q(z)$ univalen dalam cakera unit terbuka \mathbb{U} dan katalah fungsi θ dan ϕ analisis dalam domain A mengandungi $q(\mathbb{U})$, dengan $\phi(w) \neq 0$ bila $w \in q(\mathbb{U})$. Disusun

$$Q(z) = \gamma z q'(z) \phi(q(z)), \gamma > 0 \quad \text{dan} \quad h(z) = \theta(q(z)) + Q(z). \quad (10.3)$$

Andaikan bahawa

- $Q(z)$ adalah univalen dan bak-bintang \mathbb{U} ;
- $\text{Ny } \frac{zh'(z)}{Q(z)} = \text{Ny } \frac{\theta'(q(z))}{\phi(q(z))} + \frac{zQ'(z)}{Q(z)} > 0$ for $z \in \mathbb{U}$.

Jika $p(z)$ analisis dalam \mathbb{U} dengan $p(0) = q(0) = 1, p(\mathbb{U}) \subset A$ dan

$$\theta(p(z)) + zp'(z)\phi(p(z)) \prec \theta(q(z)) + zq'(z)\phi(q(z)) \quad (10.4)$$

maka

$$p(z) \prec q(z) \quad (10.5)$$

dan q adalah dominan terbaik.

Lema 10.3.2. (Bulboaca 2002) Andaikan $q(z)$ univalen dalam cakera unit terbuka \mathbb{U} dan katalah ϑ dan ϕ analisis dalam domain D yang mengandungi $q(\mathbb{U})$. Andaikan bahawa

- i. $zq'(z)\phi(q(z))$ adalah univalen dan bak bintang dalam \mathbb{U} ;
- ii. $\text{Ny} \frac{\vartheta'(q(z))}{\phi(q(z))} > 0$ untuk $z \in \mathbb{U}$.

Jika $p(z) \in H[q(0), 1] \cap \mathcal{Q}$ dengan $p(\mathbb{U}) \subseteq D$ dan $\vartheta p(z) + zp'(z)\phi(p(z))$ adalah univalen dalam \mathbb{U} dan $\vartheta(q(z)) + zq'(z)\phi(q(z)) \prec \vartheta(p(z)) + zp'(z)\phi(p(z))$ then $q(z) \prec p(z)$ adalah subordinan terbaik.

Lema 10.3.3. (Jack 1971) Andaikan fungsi (bukan pemalar) $w(z)$ analisis dalam \mathbb{U} sehingga $w(0) = 0$. Jika $|w(z)|$ mencapai nilai maksimum pada bulatan $|z| = r < 1$ pada suatu titik $z_0 \in \mathbb{U}$, maka

$$z_0 w'(z) = k w(z_0),$$

yang $k \geq 1$, suatu nombor nyata.

Lema 10.3.4. (Fukui, Owa dan Sakaguchi 1992) Fungsi yang ditakrifkan dalam (10.2) adalah univalen jika dan hanya jika

$$0 \leq nb \leq 2. \tag{10.6}$$

Tambahan lagi, syarat dalam (10.6) adalah cukup dan perlu untuk suatu fungsi menjadi fungsi bak-bintang.

Lema 10.3.5. (Miller dan Mocanu 1978) Andaikan fungsi bernilai-kompleks $\Theta(u, v)$ sehingga $\Theta : D \rightarrow \mathbb{C} (D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C})$. \mathbb{C} adalah satah kompleks. Katalah $u = u_1 + iu_2$ dan $v = v_1 + iv_2$. Andaikan bahawa fungsi $\Theta(u, v)$ memenuhi setiap syarat-syarat berikut:

- i. $\Theta(u, v)$ adalah selanjur dalam D ;
- ii. $(1, 0) \in D$ dan $\text{Ny}(\Theta(1, 0)) > 0$;
- iii. $\text{Ny}(\Theta(iu_2, v_1)) \leq 0$ untuk semua $(iu_2, v_1) \in D$ sehingga $v_1 \leq -\frac{1}{2}(1 + u_2^2)$.

Katalah $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots$ analisis dalam \mathbb{U} sehingga $(p(z), zp'(z)) \in D, z \in \mathbb{U}$. Jika $\text{Ny}(\Theta(p(z), zp'(z))) \in D$, maka $\text{Ny}(p(z)) > 0, z \in \mathbb{U}$.

10.4 HASIL SUBORDINASI DAN SUPERORDINASI

Teorem 10.4.1. *Andaikan $f(z) \in A$ memenuhi $f(z) \neq 0, z \in \mathbb{U}$. Juga diandaikan fungsi $q(z)$ univalen dalam \mathbb{U} , dengan $q(0) = 1$ dan $q(z) \neq 0$, sehingga*

$$\text{Ny} \left\{ 1 + (\beta + \eta i) \frac{zq'(z)}{q(z)} + z \frac{q''(z)}{q'(z)} \right\} > 0; \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (10.7)$$

dan

$$\text{Ny} \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \left[(\beta + \eta i + 2)q(z) + \frac{1}{\alpha}(\beta + \eta i + 1) - (\beta + \eta i + 1) \right] + (\beta + \eta i) \frac{zq'(z)}{q(z)} + \frac{zq''(z)}{q'(z)} > 0 \right\}; \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (10.8)$$

untuk $|\beta + \eta i| \leq 1$ and $\alpha > 0$. Jika

$$\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta + \eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1 - \lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha \lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right] \prec h(z) \quad (10.9)$$

dengan

$$h(z) = \alpha[q(z)]^{\beta + \eta i + 2} + (1 - \alpha)[q(z)]^{\beta + \eta i + 1} + \alpha \lambda z q'(z)[q(z)]^{\beta + \eta i}, \quad (10.10)$$

maka $\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \prec q(z), z \in \mathbb{U}$ and $q(z)$ adalah dominan terbaik untuk (10.9).

Bukti. Pertama sekali, pilih

$$p(z) = \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)}, \theta(w) = w^{\beta + \eta i} [(1 - \alpha)w + \alpha w^2] \quad \text{dan} \quad \phi(w) = w^{\beta + \eta i}$$

maka $\theta(w)$ dan $\phi(w)$ wujud dan analisis di dalam domain $\mathbb{U}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ yang mengandungi $q(\mathbb{U}), q(0) = 1$ dan $\phi(w) \neq 0$ bila $w \in q(\mathbb{U})$.

Sekarang, jika ditakrifkan fungsi $Q(z)$ dan $h(z)$ dengan

$$Q(z) = \alpha \lambda z q'(z) \phi[q(z)] = \alpha \lambda z q'(z) [q(z)]^{\beta + \eta i}$$

dan

$$h(z) = \theta[q(z)] + Q(z) = \alpha[q(z)]^{\beta+\eta i+2} + (1-\alpha)[q(z)]^{\beta+\eta i+1} + \alpha\lambda zq'(z)[q(z)]^{\beta+\eta i},$$

maka daripada (10.7) dan (10.8) didapati bahawa $Q(z)$ adalah bak-bintang dalam \mathbb{U} dan

$$\begin{aligned} \operatorname{Ny} \left(\frac{zh'(z)}{Q(z)} \right) &= 1 + \frac{1}{\lambda} \left[(\beta + \eta i + 2)q(z) + \frac{1}{\alpha}(\beta + \eta i + 1) - (\beta + \eta i + 1) \right] \\ &+ (\beta + \eta i) \frac{zq'(z)}{q(z)} + \frac{zq''(z)}{q'(z)} > 0, z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

Didapati juga bahawa $p(z)$ adalah analisis dalam \mathbb{U} , dengan $p(0) = q(0) = 1$. Oleh kerana $0 \notin p(\mathbb{U})$, maka $p(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}^*$ dan $\alpha\lambda > 0$. Oleh itu, hipotesis bagi Lema 10.3.1 dipenuhi.

Oleh kerana $p(z) = \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)}$, maka

$$\begin{aligned} p'(z) &= \frac{f_b(z)[zf''_b(z) + f'_b(z)] - z[f'_b(z)]^2}{[f_b(z)]^2} \\ &= \frac{[zf_b(z)f''_b(z) + f_b(z)f'_b(z)] - z[f'_b(z)]^2}{[f_b(z)]^2} \\ &= z \frac{f''_b(z)}{f_b(z)} + \frac{f'_b(z)}{f_b(z)} - z \left[\frac{f'_b(z)}{f_b(z)} \right]^2. \end{aligned}$$

Dengan mendarabkan $p'(z)$ dengan z , diperoleh

$$zp'(z) = z^2 \frac{f''_b(z)}{f_b(z)} + z \frac{f'_b(z)}{f_b(z)} - \left[z \frac{f'_b(z)}{f_b(z)} \right]^2.$$

Menggunakan Lema 10.3.1, didapati bahawa

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right] \\
 = & \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \left[(1 - \alpha + \alpha\lambda) \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) + \alpha(1-\lambda) \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \alpha\lambda \left(\frac{z^2 f''_b(z)}{f_b(z)} \right) \right] \\
 = & (p(z))^{\beta+\eta i} \left[(1 - \alpha + \alpha\lambda)p(z) + \alpha(1-\lambda)(p(z))^2 + \alpha\lambda(zp'(z) - p(z) + [p(z)]^2) \right], \\
 = & (p(z))^{\beta+\eta i} \left[(1 - \alpha)p(z) + \alpha(p(z))^2 + \alpha\lambda zp'(z) \right] \\
 = & \alpha(p(z))^2 (p(z))^{\beta+\eta i} + (1 - \alpha)p(z)(p(z))^{\beta+\eta i} + \alpha\lambda zp'(z)(p(z))^{\beta+\eta i} \\
 = & (p(z))^{\beta+\eta i} \left[(1 - \alpha)p(z) + \alpha(p(z))^2 \right] + \alpha\lambda zp'(z)(p(z))^{\beta+\eta i} \\
 = & \theta(p(z)) + \alpha\lambda zp'(z)(p(z))^{\beta+\eta i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \prec h(z) &= \alpha(q(z))^2 (q(z))^{\beta+\eta i} + (1 - \alpha)q(z)(q(z))^{\beta+\eta i} + \alpha\lambda zq'(z)(q(z))^{\beta+\eta i} \\
 &= \theta(q(z)) + \alpha\lambda zq'(z)(q(z))^{\beta+\eta i}
 \end{aligned}$$

yang mengimplikasikan

$$\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \prec q(z), (z \in \mathbb{U})$$

dan membuktikan $q(z)$ adalah dominan terbaik bagi (10.9).

Teorem 10.4.2. Katalah f analisis dalam \mathbb{U} sehingga $f(0) = 0$, h merupakan fungsi univalen dan cembung dalam \mathbb{U} dan $h \in H[0, 1] \cap \mathcal{Q}$. Andaikan bahawa

$$\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right]$$

adalah fungsi univalen dalam \mathbb{U} , yang $|\beta + \eta i| \leq 1$ dan $\alpha > 0$. Jika $h \in A$ dan subordinasi menurut

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \theta(q(z)) + \alpha\lambda zq'(z)(q(z))^{\beta+\eta i} \\
 \prec & \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

maka $q(z) \prec \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)}\right)$ mengimplikasikan bahawa $q(z) \prec p(z)$, yang $p(z) = \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)}\right)$ dan $q(z)$ adalah subordinan terbaik.

Bukti. Matlamatnya adalah untuk menggunakan Lema 10.3.2. Ditulis

$$p(z) = \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)}, \quad \vartheta(w) = w^{\beta+\eta i}[(1-\alpha)w + \alpha w^2] \quad \text{dan} \quad \varphi(w) = w^{\beta+\eta i}$$

maka $\vartheta(w)$ dan $\varphi(w)$ wujud dan analisis dalam domain $\mathbb{U}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ yang mengandungi $p(\mathbb{U})$, $p(0) = 1$ dan $\varphi(w) \neq 0$ bila $w \in p(\mathbb{U})$. Dapat diperhatikan bahawa $\vartheta(w)$ dan $\varphi(w)$ adalah analisis dalam \mathbb{U} . Justeru

$$\operatorname{Ny} \left\{ \frac{\vartheta'(q(z))}{\varphi(q(z))} \right\} > 0.$$

Sekarang, perlu ditunjukkan bahawa

$$h(z) = \vartheta(q(z)) + \alpha \lambda z q'(z) \varphi(q(z)) \prec \varphi(p(z)) + \alpha \lambda z p'(z) \varphi(p(z)).$$

Dengan menggunakan andaian daripada teorem di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} h(z) &= \vartheta(q(z)) + \alpha \lambda z q'(z) \varphi(q(z)) \\ &= \left[\alpha (q(z))^2 (q(z))^{\beta+\eta i} + (1-\alpha) q(z) (q(z))^{\beta+\eta i} \right] + \alpha \lambda z q'(z) (q(z))^{\beta+\eta i} \end{aligned}$$

dan didapati

$$\begin{aligned} &\alpha (q(z))^2 (q(z))^{\beta+\eta i} + (1-\alpha) q(z) (q(z))^{\beta+\eta i} + \alpha \lambda z q'(z) (q(z))^{\beta+\eta i} \\ &\prec \varphi(p(z)) + \alpha \lambda z p'(z) \varphi(p(z)) \\ &= \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \\ &\quad \times \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha \lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Oleh itu, dalam pandangan Lema 10.3.2, $q(z) \prec p(z)$ yang mengimplikasikan $q(z) \prec \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)}\right)$ dan $q(z)$ adalah subordinan terbaik.

Jika digabungkan Teorem 10.4.1 dan 10.4.2, maka diperoleh teorem pembeza *Jenis-Sandwic*. Dengan memilih nilai-nilai tertentu ke dalam Teorem 10.4.1 dan 10.4.2, diperoleh hasil yang daripada penyelidik terdahulu. Iaitu dengan memilih nilai $\beta = \eta = 0$, diperoleh hasil sebagaimana ditunjukkan oleh Siregar dan Darus (2011). Manakala dengan memilih nilai $\beta = \eta = 0$ dan $\lambda = 1$, diperoleh hasil yang sama seperti Siregar (2011).

10.5 SIFAT-SIFAT BAGI KELAS $M_b(\alpha, \lambda, \beta, \eta)$

Kaedah pembuktian bagi teorem seterusnya ini diambil daripada Kamali dan Srivastava (2004).

Teorem 10.5.1. *Andaikan $f_b(z)$ fungsi simetri n -lipatan, yang ditakrifkan oleh (10.1), analisis dalam \mathbb{U} , dengan $\frac{f_b(z)}{z} \neq 0, z \in \mathbb{U}$. Jika $f_b(z)$ memenuhi ketaksamaan:*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right] \\ & > \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2} \right) - \frac{\alpha\lambda nb}{4} \right], \end{aligned} \quad (10.11)$$

maka $f_b(z)$ adalah fungsi bak bintang dalam U untuk $\alpha > 0, |\beta + \eta i| \leq 1$ dan

$$\left(0 \leq nb < 2; \frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2 - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \leq nb \leq \frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2 + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right),$$

yang $\Delta := \alpha^2(\lambda + 2)^2 + 4\alpha(\lambda - 2) + 4$.

Bukti. Andaikan $\alpha > 0, \lambda > 0$ dan $f_b(z)$ memenuhi hipotesis Teorem 10.5.1. Andaikan juga

$$\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} = \frac{1 + (nb - 1)w(z)}{1 - w(z)}, \quad (10.12)$$

yang $w(\mathbb{U})$ analisis dalam \mathbb{U} , dengan $w(0) = 0$ dan $w(z) \neq 1$.

Maka, dengan pembezaan (10.12) terhadap z , diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{[f'_b(z) + zf''_b(z)] f_b(z) - z[f'_b(z)]^2}{[f_b(z)]^2} \\ &= \frac{(nb-1)w'(z)(1-w(z)) + w'(z)[1+(nb-1)w(z)]}{(1-w(z))^2}. \end{aligned}$$

yang mengimplikasikan

$$\frac{zf''_b(z)}{f_b(z)} + \frac{f'_b(z)}{f_b(z)} - z \left[\frac{f'_b(z)}{f_b(z)} \right]^2 = \frac{nbw'(z)}{[1-w(z)]^2}$$

dan apabila didarabkan dengan $\frac{f_b(z)}{f'_b(z)}$, diperoleh

$$1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} - \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} = \frac{nbzw'(z)}{[1-w(z)][1+(nb-1)w(z)]}.$$

Dapat ditulis bahawa

$$1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} = \frac{nbzw'(z)}{[1-w(z)][1+(nb-1)w(z)]} + \frac{1+(nb-1)w(z)}{1-w(z)} \quad (10.13)$$

daripada (10.12) dan (10.13) mengimplikasikan (10.2). Sehingga

$$\begin{aligned} & \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right] \\ &= \left(\frac{1+(nb-1)w(z)}{1-w(z)} \right)^{\beta+\eta i} \\ & \times \left[\left(\frac{1+(nb-1)w(z)}{1-w(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \left(\frac{1+(nb-1)w(z)}{1-w(z)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha\lambda \left(\frac{nbzw'(z)}{(1-w(z))[1+(nb-1)w(z)]} + \frac{1+(nb-1)w(z)}{1-w(z)} \right) \right) \right] \\ &= \left(\frac{1+(nb-1)w(z_0)}{1-w(z_0)} \right)^{\beta+\eta i} \left[(1-\alpha) \left(\frac{1+(nb-1)w(z)}{1-w(z)} \right) \right. \\ & \left. + \alpha \left(\frac{[1+(nb-1)w(z)]^2 + \lambda nbzw'(z)}{(1-w(z))^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Dipertimbangkan juga $w(z) < 1$ ($z \in \mathbb{U}$).

Jika wujud suatu titik z_0 dalam \mathbb{U} sehingga $|w(z_0)| = 1$, maka daripada Lema 10.3.3, didapati bahawa

$$z_0 w'(z) = kw(z_0),$$

yang $k \geq 1$ adalah suatu nombor nyata.

Dengan mengandaikan bahawa $w(z_0) = e^{i\theta}$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), diperoleh

$$\begin{aligned} & \text{Ny} \left\{ \left(\frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} \right)^{\beta+\eta i} \right. \\ & \times \left. \left[\left(\frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{z_0 f''_b(z_0)}{f'_b(z_0)} \right) \right) \right] \right\} \\ &= \text{Ny} \left\{ \left(\frac{1 + (nb-1)w(z_0)}{1-w(z_0)} \right)^{\beta+\eta i} \left[(1-\alpha) \left(\frac{1 + (nb-1)w(z_0)}{1-w(z_0)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha \left(\frac{[1 + (nb-1)w(z_0)]^2 + \lambda nb z_0 w'(z_0)}{(1-w(z_0))^2} \right) \right] \right\} \\ &= \text{Ny} \left\{ \left(\frac{1 + (nb-1)w(z_0)}{1-w(z_0)} \right)^{\beta+\eta i} \left[(1-\alpha) \left(\frac{1 + (nb-1)w(z_0)}{1-w(z_0)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha \left(\frac{[1 + (nb-1)w(z_0)]^2 + \lambda nbkw(z_0)}{(1-w(z_0))^2} \right) \right] \right\} \\ &= \text{Ny} \left\{ \left(\frac{1 + (nb-1)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right)^{\beta+\eta i} \left[(1-\alpha) \left(\frac{1 + (nb-1)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha \left(\frac{\lambda nbke^{i\theta} + [1 + (nb-1)e^{i\theta}]^2}{(1-e^{i\theta})^2} \right) \right] \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \left(\frac{1 + (nb-1)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right)^{\beta+\eta i} \left[(1-\alpha) \left(\frac{1 + (nb-1)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha \left(\frac{\lambda nbke^{i\theta} + [1 + (nb-1)e^{i\theta}]^2}{(1-e^{i\theta})^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Ny} \left\{ \left(\frac{1+(nb-1)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right)^{\beta+\eta i} \left[(1-\alpha) \left(\frac{1+(nb-1)e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha \left(\frac{\lambda nbk e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} + \left[\frac{1+(nb-1)e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})} \right]^2 \right) \right] \right\} \\
&= \text{Ny} \left\{ \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)] + \sin[\ln(2-nb)i]}{2} \right] \left[(1-\alpha) \left(1 - \frac{nb}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha \left(\frac{-\lambda nbk}{4\sin^2(\frac{\theta}{2})} + \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^2 + \left(\frac{nb}{2} \right)^2 \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right) \right) \right] \right\} \\
&= \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left[(1-\alpha) \left(1 - \frac{nb}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \alpha \left(\frac{-\lambda nbk}{4\sin^2(\frac{\theta}{2})} + \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^2 + \left(\frac{nb}{2} \right)^2 \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right) \right) \right] \\
&= \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left[\left(1 - \frac{\alpha nb}{2} \right) \left(1 - \frac{nb}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha nb}{4} \left(\frac{k + \lambda nbk \cos^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \right) \right] \\
&\leq \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2} \right) - \frac{\alpha \lambda nb}{4} \right], \quad (z \in U).
\end{aligned}$$

yang $k \geq 1$.

Jika diandaikan

$$\begin{aligned}
&\text{Ny} \left\{ \left(\frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} \right)^{\beta+\eta i} \left[\left(\frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} + \alpha \lambda \left(1 + \frac{z_0 f''_b(z_0)}{f'_b(z_0)} \right) \right) \right] \right\} \\
&\leq \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2} \right) - \frac{\alpha \lambda nb}{4} \right] \\
&= \tau(nb), \tag{10.14}
\end{aligned}$$

maka $\tau(nb) \leq 0$. Dengan $nb \rightarrow 2$ dan

$$\left(\frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \leq nb \leq \frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2\sqrt{\Delta}}{2\alpha}; \Delta := \alpha^2(\lambda + 2)^2 + 4\alpha(\lambda - 2) + 4 \right).$$

Oleh itu, didapati bahawa

$$\begin{aligned} & \text{Ny} \left\{ \left(\frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} \right)^{\beta + \eta i} \left[\left(\frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1 - \lambda) \frac{z_0 f'_b(z_0)}{f_b(z_0)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \alpha\lambda \left(1 + \frac{z_0 f''_b(z_0)}{f'_b(z_0)} \right) \right) \right] \right\} \leq 0, z \in \mathbb{U} \end{aligned} \quad (10.15)$$

yang $0 \leq nb < 2$ dan

$$\left(\frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \leq nb \leq \frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2\sqrt{\Delta}}{2\alpha}; \Delta := \alpha^2(\lambda + 2)^2 + 4\alpha(\lambda - 2) + 4 \right).$$

Ini bercanggah dengan hipotesis dalam Teorem 10.5.1. Justeru, $|w(z)| < 1$ bagi semua z dalam \mathbb{U} . Jadi, f_b adalah fungsi bak-bintang dalam \mathbb{U} , dan terbukti syarat pertama dalam Teorem 10.5.1. Pembuktian syarat kedua pada Teorem 10.5.1 adalah sama dengan pembuktian dalam kajian Fukui, Owa dan Sakaguchi (1992). Pembuktian syarat ketiga bagi Teorem 10.5.1 pula boleh didapati secara terperinci dalam kajian Kamali dan Srivastava (2004).

Jika $\beta = \eta = 0$ dalam Teorem 10.5.1, maka diperoleh korolari berikut seperti yang diperoleh Saibah dan Darus (2011).

Korolari 10.5.2. *Andaikan $f_b(z)$ fungsi simetri m -lipatan, yang ditakrifkan oleh (10.1), analisis dalam \mathbb{U} , dengan $\frac{f_b(z)}{z} \neq 0, z \in \mathbb{U}$. Jika $f_b(z)$ memenuhi ketaksamaan:*

$$\begin{aligned} & \text{Ny} \left\{ \frac{z f'_b(z)}{f_b(z)} \left[1 - \alpha + \alpha(1 - \lambda) \frac{z f'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{z f''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right] \right\} \\ & > \left(1 - \frac{nb}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2} \right) - \frac{\alpha\lambda nb}{4}, \end{aligned} \quad (10.16)$$

maka $f_b(z)$ adalah fungsi bak bintang dalam \mathbb{U} untuk $\alpha > 0$ dan

$$\left(\frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2 - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \leq nb \leq \frac{\alpha\lambda + 2\alpha + 2 + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right),$$

yang $\Delta := \alpha^2(\lambda + 2)^2 + 4\alpha(\lambda - 2) + 4$.

Korolari 10.5.3. Andaikan $f_b(z)$ fungsi simetri n -lipatan, yang ditakrifkan oleh (4), analisis dalam U , dengan $\frac{f_b(z)}{z} \neq 0, z \in U$. Jika $f_b(z)$ memenuhi ketaksamaan:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta + \eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) - \alpha \frac{z^2 f''_b(z)}{f_b(z)} \right] \\ & > \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos \ln(2 - nb)}{2} \right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2} \right) - \frac{\alpha \lambda nb}{4} \right], \end{aligned} \quad (10.17)$$

maka $f_b(z)$ adalah fungsi bak bintang dalam U untuk $\alpha > 0, |\beta + \eta i| \leq 1$ dan

$$\left(0 \leq nb < 2; \frac{3\alpha + 2 - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \leq nb \leq \frac{3\alpha + 2 + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right),$$

yang $\Delta := 9\alpha^2 - 4\alpha + 4$.

10.6 APLIKASI KETAKSAMAAN PEMBEZAAN

Keputusan yang telah diperoleh di atas akan digunakan untuk mendapatkan hasil yang melibatkan ketaksamaan pembezaan dan syarat cukup bagi fungsi kebakbintangan simetri lipatan ke- m , iaitu f_b seperti yang ditakrifkan oleh (10.2) dengan menggunakan Lema 10.3.5.

Pertimbangkan implikasi berikut:

$$\begin{aligned} & \text{Ny} \left\{ \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta + \eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left(1 - \alpha + \alpha(1 - \lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right] \right\} \\ & > \left(1 - \frac{nb}{2} \right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2 - nb)]}{2} \right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2} \right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2} \right) - \frac{\alpha \lambda nb}{4} \right]. \end{aligned}$$

Maka,

$$\text{Ny} \left\{ \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^\mu \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{U} \quad (10.18)$$

dan

$$\left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) - \frac{\alpha \lambda nb}{4} \right] < 1,$$

$$\alpha \geq 0, \lambda > 0, \beta \in \mathbb{R}; \mu \geq 1.$$

Apabila

$$p(z) = \left\{ \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right\}^\mu$$

maka (10.18) adalah setara dengan

$$\text{Ny} \left\{ \frac{\alpha \lambda}{\mu} \{p(z)\}^{\frac{1-\mu}{\mu}} zp'(z) + \alpha \{p(z)\}^{2/\mu} + (1-\alpha)p(z)^{\frac{1}{\mu}} - \left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \right.$$

$$\left. \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left(\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) + \frac{\lambda \alpha nb}{4} \right) \right\} > 0 \quad (10.19)$$

$$\Rightarrow \text{Ny}(p(z)) > 0, \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Dengan mengandaikan $p(z) = u$ dan $zp'(z) = v$, serta

$$\Theta(z) = \frac{\alpha \lambda}{\mu} u^{\frac{1-\mu}{\mu}} v + \alpha u^{2/\mu} + (1-\alpha)u^{\frac{1}{\mu}}$$

$$- \left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left(\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) + \frac{\lambda \alpha nb}{4} \right)$$

untuk $\alpha \geq 0$ dan $\mu \geq 1$, didapati bahawa $\Theta(u, v)$ adalah selanjut dalam $D = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$, $(1, 0) \in D$ dan

$$\text{Ny}(\Theta(1, 0))$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left(\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) + \frac{\lambda \alpha nb}{4} \right) > 0.$$

Oleh kerana

$$\left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2} \right] \left(\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) + \frac{\lambda \alpha nb}{4} \right) < 1.$$

Oleh itu, syarat (i) dan (ii) pada Lema 10.3.5 telah dipenuhi. Seterusnya, untuk $(iu_2, v_1) \in D$ dan $v_1 \leq -\frac{1}{2}(1 + u_2^2)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Ny}(\Theta(iu_2, v_1)) &= \frac{\alpha\lambda}{\mu} |u_2|^{\frac{(1-\mu)}{\mu}} v_1 \cos\left(\frac{(1-\mu)\pi}{2\mu}\right) + \alpha |u_2|^{\frac{2}{\mu}} \cos\left(\frac{\pi}{\mu}\right) \\ &+ (1-\alpha) |u_2|^{\frac{1}{\mu}} \cos\left(\frac{\pi}{2\mu}\right) \\ &- \left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2}\right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) + \frac{\lambda \alpha nb}{4}\right] \\ \leq &-\frac{\alpha\lambda}{2\mu} (1 + u_2^2) |u_2|^{\frac{(1-\mu)}{\mu}} \sin\left(\frac{\pi}{2\mu}\right) + \alpha |u_2|^{\frac{2}{\mu}} \cos\left(\frac{\pi}{\mu}\right) \\ &+ (1-\alpha) |u_2|^{\frac{1}{\mu}} \cos\left(\frac{\pi}{2\mu}\right) \\ &- \left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2}\right] \left[\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) + \frac{\lambda \alpha nb}{4}\right], \end{aligned}$$

dengan mengambil $|u_2| = \zeta$ ($\zeta > 0$), didapati bahawa

$$\text{Ny}(\Theta(iu_2, v_1)) \leq \Phi(\zeta), \quad (10.20)$$

yang

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) : &= -\frac{\alpha\lambda}{2\mu} (1 + \zeta^2) \zeta^{\frac{(1-\mu)}{\mu}} \sin\left(\frac{\pi}{2\mu}\right) + \alpha \zeta^{\frac{2}{\mu}} \cos\left(\frac{\pi}{\mu}\right) + (1-\alpha) \zeta^{\frac{1}{\mu}} \cos\left(\frac{\pi}{2\mu}\right) \\ &- \left(1 - \frac{nb}{2}\right)^\beta \left[\frac{\cos[\ln(2-nb)]}{2}\right] \\ &\left[\left(1 - \frac{nb}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha nb}{2}\right) + \frac{\lambda \alpha nb}{4}\right]. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Untuk beberapa pilihan parameter α, λ, μ , dan nb , didapati bahawa

$$\Phi(\zeta) \leq 0 \quad (\zeta > 0),$$

Oleh itu, daripada kesamaan (10.20) dan Lema 10.3.5, dapat disimpulkan bahawa implikasi hubungan (10.18) adalah benar.

Seterusnya, dengan memilih nilai $\mu = 1$ dan $nb = 1$, diperoleh yang berikut:

Teorem 10.6.1. *Andaikan f_b adalah fungsi simetri lipatan ke- m , ditakrifkan oleh (10.1) dan analisis dalam \mathbb{U} dengan*

$$\frac{f_b(z)}{z} \neq 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

memenuhi ketaksamaan berikut:

$$\begin{aligned} & \text{Ny} \left\{ \left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right)^{\beta+\eta i} \left[\left(\frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right) \left([1-\alpha + \alpha(1-\lambda) \frac{zf'_b(z)}{f_b(z)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \alpha\lambda \left(1 + \frac{zf''_b(z)}{f'_b(z)} \right) \right) \right] \right\} > 0, \end{aligned} \quad (10.22)$$

maka $f_b \in S^*$ untuk setiap nombor nyata $\alpha \geq 0$ dan $\lambda > 0$.

Bukti Andaikan nilai $\mu = 1$ dan $nb = 1$, daripada (10.21) didapati bahawa

$$\Phi(\zeta) := -\frac{\alpha}{2} [\lambda(1+\zeta^2) + 2\zeta^2] \leq 0. \quad (\zeta \in \mathbb{R})$$

Berdasarkan Teorem 10.6.1, diperoleh keputusan dari kajian Kamali dan Srivastava (2004) untuk $\lambda = 1$.

BAB XI

KESIMPULAN DAN KAJIAN LANJUTAN

11.1 KESIMPULAN

Bab ini akan merumuskan kesemua pemerhatian dan hasil-hasil yang diperoleh dalam keseluruhan sembilan bab sebelum ini. Dalam bab satu, telah dinyatakan takrifan asas dan hasil terdahulu melibatkan fungsi univalen dan p -valen.

Hasil yang diperoleh dari bab dua ialah dengan memperkenalkan pengoperasian baharu sekutuan diantara pengoperasian Srivastava-Choi dan fungsi polilogaritma teritlak. Kelas fungsi univalen baharu telah ditakrifkan. Beberapa sifat bagi kelas fungsi ini telah dikaji.

Dalam bab tiga, kajian menumpukan pada penggunaan penentu Hankel peringkat kedua dan ketiga bagi mendapatkan batas terbaik bagi kelas fungsi melibatkan fungsi polilogaritma teritlak. Turut dikaji adalah penentu hankel peringkat kedua untuk kelas fungsi baharu melibatkan fungsi Fox-Wright dan polilogaritma teritlak.

Dalam bab empat dan bab lima, diperkenalkan fungsi analog- q bagi fungsi polilogaritma teritlak. Seterusnya, dikaji sifat subordinasi bagi kelas fungsi analog- q polilogaritma teritlak ini. Diperoleh juga pekali ketaksamaan Fekete-Szegö bagi pengoperasian polilogaritma teritlak dalam subkelas yang telah ditakrifkan.

Seterusnya, dalam bab enam kajian melibatkan fungsi analisis dan bi-univalen melibatkan fungsi Fox-Wright teritlak dan polinomial Faber dikaji. Tambahan fungsi Fox-Wright teritlak dan Kuroki-Owa juga dipertimbangkan.

Dalam bab tujuh dan bab lapan, diperkenalkan subkelas baharu melibatkan fungsi ganjil univalen yang ditakrifkan menggunakan pengoperasi Salagean. Turut dikaji sifat-sifat bagi kelas fungsi ini.

Dalam bab sembilan, kajian beralih kepada pengoperasi pengkamir teritlak bagi fungsi p -valen dalam pengertian fungsi bak-bintang Janowski.

Akhir sekali, dalam bab sepuluh, kajian dilakukan bagi mendapatkan syarat tetentu bagi kebakbintangan subkelas baharu melibatkan fungsi analisis jenis Koebe berperingkat kompleks. Diperoleh juga hasil subordinasi dan superordinasi bagi kelas fungsi ini.

11.2 KAJIAN LANJUTAN

Bagi kajian lanjutan, boleh dilakukan beberapa kajian pada kesemua kelas fungsi yang telah diperkenalkan terutama bagi mendapatkan batas atas Fekete-Szego. Selain itu, beberapa kelas fungsi baharu boleh ditakrifkan bagi meromorfik dan harmonik. Banyak hasil baharu boleh diperoleh.

RUJUKAN

- Abubaker, A. & Darus, M. 2011. Hankel determinant for a class of analytic functions involving a generalized linear differential operator. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 69(4): 429–435.
- Acu, M. & Oros, G. 2020. Starlikeness condition for a new differential-integral operator. *Mathematics* 8(5): 1–9.
- Agrawal, S. & Sahoo, S.K. 2017. Radius of convexity of partial sums of odd functions in the close-to-convex family. *Filomat* 31(11): 3519–3529.
- Ahuja, O.P. 1985. Integral operators of certain univalent functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 8(4): 653–662.
- Ahuja, O.P. & Silverman, H. 1989. Function classes related to Ruscheweyh derivatives. *Journal of the Australian Mathematical Society* 47(3): 438–444.
- Airault, H. & Bouali, A. 2006. Differential calculus on the Faber polynomials. *Bulletin des Sciences Mathématiques* 130(3): 179–222.
- Al-Abbadi, M.H. & Darus, M. 2009. Differential subordination for new generalised derivative operator. *Acta Universitatis Apulensis Mathematics-Informatics* 20: 20: 265–280.
- Al-Abbadi, M.H. & Darus, M. 2012a. Differential subordination for certain generalised operator. *Miskolc Mathematical Notes* 13(2): 209–222.
- Al-Abbadi, M.H. & Darus, M. 2012b. Hankel determinant for certain class of analytic function defined by generalized derivative operator. *Tamkang Journal of Mathematics* 43(3): 445–453.
- Al-Amiri, H. & Fernando, T.S. 1990. On close-to-convex functions of complex order. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 13: 321–330.
- Al-Kharsani, H.A. & Al-Hajiry, S.S. 2008. A note on certain inequalities for p -valent functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 9(3): 1–13.
- Al-Oboudi, F.M. 2004. On univalent functions defined by a generalized Salagean operator. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2004: 1429–1436.
- Al-Refai, O. & Darus, M. 2009. Second Hankel determinant for certain class of analytic function defined by a fractional operator. *European Journal of Scientific Research* 28(2): 234–241.

- Al-Shaqsi, K. & Darus, M. 2006. On coefficient problems of certain analytic functions involving Hadamard products. *International Mathematical Forum* 1(34): 1669–1676.
- Al-Shaqsi, K. & Darus, M. 2008. An operator defined by convolution involving the polylogarithms functions. *Journal of Mathematics and Statistics* 4(1): 46–50.
- Alb Lupaş, A. 2022. Subordination results on the q -analogue of the Salagean differential operator. *Symmetry* 14(8): 1744.
- Aldweby, H. & Darus, M. 2013. A subclass of harmonic univalent functions associated with q -analogue of Dziok-Srivastava operator. *ISRN Mathematical Analysis* 2013: 382312.
- Aldweby, H. & Darus, M. 2014. Some subordination results on q -analogue of Ruscheweyh differential operator. *Abstract and Applied Analysis* 2014: 958563.
- Aldweby, H. & Darus, M. 2017. On Fekete-Szegő problems for certain subclasses defined by q -derivative. *Journal of Function Spaces* 2017: 1–5.
- Alexander, J.W. 1915. Function which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Annals of Mathematics* 17: 12–22.
- Ali, R.M., Lee, S.K., Ravichandran, V. & Supramaniam, S. 2012. Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions. *Applied Mathematics Letters* 25(3): 344–351.
- Alsoboh, A. & Darus, M. 2020. On Fekete-Szegő problems for certain subclasses of analytic functions defined by differential operator involving-Ruscheweyh operator. *Journal of Function Spaces* 2020: 8459405.
- Altinkaya, S. & Yalcin, S. 2016. Coefficient bounds for a general subclass of bi-univalent functions. *Le Matematiche* 71(1): 89–97.
- Anastassiou, G.A. & Gal, S.G. 2006. Geometric and approximation properties of some singular integrals in the unit disk. *Journal of Inequalities and Applications* 2006: 17231.
- Aral, A. 2006. On generalized Picard and Gauss-Weierstrass singular integrals. *Journal of Computational Analysis and Applications* 8(3): 289.
- Aral, A. & Gupta, V. 2009. On q -Baskakov type operators. *Demonstratio Mathematica* 42(1): 109–122.
- Aral, A., Gupta, V. & Agarwal, R. 2013. *Application of q -Calculus in Operator Theory*. New York: Springer.
- Arif, M., Haq, M.U. & Liu, J.L. 2018. A subfamily of univalent functions associated

- with q -analogue of Noor integral operator. *Journal of Function Spaces* 2018: 1–5.
- Attiya, A.A. & Aouf, M.K. 2007. A study on certain class of analytic functions defined by Ruscheweyh derivative. *Soochow Journal of Mathematics* 33: 273–289.
- Babalola, K.O. 2010. On $H_3(1)$ Hankel determinant for some classes of univalent functions. *Inequality Theory and Applications* 6: 1–7.
- Bansal, D. 2013. Upper bound of second Hankel determinant for a new class of analytic functions. *Applied Mathematics Letters* 26(1): 103–107.
- Bansal, D., Maharana, S. & Prajapat, J.K. 2015. Third order Hankel determinant for certain univalent functions. *Journal of the Korean Mathematical Society* 52(6): 1139–1148.
- Bateman, H. 1953. *Higher Transcendental Functions*. New York: McGraw Hill Book Company.
- Bernardi, S.D. 1969. Convex and starlike univalent functions. *Transaction of American Mathematical Society* 135: 429–446.
- Bieberbach, L. 1916. *Über die Koeffizienten Derjenigen Potenzreihen, Welche Eine Schlichte Abbildung des Einheitskreises Vermitteln*. Berlin: Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu.
- Bohra, N. & Ravichandran, V. 2017. On coefficient problem for bi-univalent analytic functions. *arXiv: Complex Variables* 1: 1–20.
- Brannan, D.A. & Clunie, J.G. 1980. *Aspects of Contemporary Complex Analysis*. New York: Academic Press.
- Brannan, D.A. & Taha, T.S. 1985. On some classes of bi-univalent functions. *Mathematical Analysis and Its Applications* 3: 53–60.
- Brannan, D.A. & Taha, T.S. 1988. On some classes of bi-univalent functions. *Mathematical Analysis and Its Applications* 6: 53–60.
- Breaz, D. & Breaz, N. 2002. Two integral operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica, Cluj-Napoca* 47(3): 13–21.
- Breaz, D., Owa, S. & Breaz, N. 2008. A new integral univalent operator. *Acta Universitatis Apulensis. Mathematics-Informatics* 16: 11–16.
- Bulboacă, T. 2002. Classes of first-order differential subordinations. *Demonstratio Mathematica* 35(2): 287–292.
- Bulut, S. 2014. Coefficient estimates for new subclasses of meromorphic bi-univalent

- functions. *International Scholarly Research Notices* 2014: 1–5.
- Bulut, S. 2016. Coefficient estimates for general subclasses of m -fold symmetric analytic bi-univalent functions. *Turkish journal of mathematics* 46(16): 1386–1397.
- Çağlar, M., Orhan, H. & Yağmur, N. 2013. Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions. *Filomat* 27(7): 1165–1171.
- Caplinger, T.R. & Causey, W.M. 1973. A class of univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 39(2): 357–361.
- Chen, M.P. & Owa, S. 1991. Distortion theorems for alpha-starlike functions. *Kyungpook Mathematical Journal* 31(2): 155–159.
- Darus, M. 2012. *Rentetan Teori Fungsi Geometri, Khayalan atau Realiti*. Bangi: Penerbit Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Darus, M. & Ibrahim, R.W. 2008. Generalization of differential operator. *Journal of Mathematics and Statistics* 4(3): 138–144.
- de Brange, L. 1985. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Mathematica* 154: 137–152.
- Duren, P.L. 1983. *Univalent Functions*. Berlin: Springer-Verlag.
- Eenigenburg, P.J., Mocanu, P.T. & Reade, M.O. 1984. On a Briot-Bouquet differential subordination. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics* 29: 567–573.
- Eghbiq, A. & Darus, M. 2016. Univalence criteria of certain integral operator. *Journal of Quality Measurement and Analysis (JQMA)* 12(2): 107–114.
- Exton, H. 1983. *q -hypergeometric Functions and Applications*. University of Michigan: E. Horwood Halsted Press.
- Fekete, M. & Szego, G. 1933. Eine bemerkung ber ungerade schlichte funktionen. *Journal of the London Mathematical Society* 8: 85–89.
- Flett, T.M. 1972. The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 38(3): 746–765.
- Frasin, B.A. 2005. Partial sums of certain analytic and univalent functions. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyí regyháziensis. New Series* 21: 135–145.
- Frasin, B.A. 2008. Generalization of partial sums of certain analytic and univalent

- functions. *Applied Mathematics Letters* 21(7): 735–741.
- Frasin, B.A. 2009. Univalence of two general integral operators. *Filomat* 23(3): 223–229.
- Frasin, B.A. & Aouf, M.K. 2011. New subclasses of bi-univalent functions. *Applied Mathematics Letters* 24(1): 1569–1573.
- Friedland, S. 1970. On a conjecture of Robertson. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 37: 255–261.
- Fukui, S., Owa, S. & Sakaguchi, K. 1992. *Some Properties of Analytic Functions of Koebe Type*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
- Garabedian, P.R. & Schiffer, M. 1955. A coefficient inequality for schlicht functions. *Annals of Mathematics* 61: 116–136.
- Gasper, G. & Rahman, M. 1990. *Basic Hypergeometric Functions Series*. New York: Cambridge University Press.
- Goodman, A.W. 1983. *Univalent Functions Volume I and II*. Washington: Mariner Publishing Company.
- Goodman, A.W. 1991. On uniformly starlike functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 155(2): 364–370.
- Govindaraj, M. & Sivasubramanian, S. 2017. On a class of analytic functions related to conic domains involving q -calculus. *Analysis Mathematica* 43(3): 475–487.
- Grenander, U. & Szegő, G. 1958. *Toeplitz Forms and Their Applications*. California: University of California Press.
- Gronwall, T.H. 1914. Sur le deformation dans la representation conforme. *Comptes Rendus (Paris)* 162: 249–252.
- Gupta, V.P. & Jain, P.K. 1976. Certain classes of univalent functions with negative coefficients. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 14(3): 409–416.
- Hamidi, S.G. & Jahangiri, J.M. 2014. Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions. *Comptes Rendus Mathematique* 352(1): 17–20.
- Hu, K. 1986. Coefficients of odd univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 96(1): 183–186.
- Ismail, M., Merkes, E. & Styer, D. 1990. A generalization of starlike functions. *Complex Variable Theory Application* 14: 14: 77–84.
- Jack, I.S. 1971. Functions starlike and convex of order α . *Journal of the London*

Mathematical Society 2(3): 469–474.

Jackson, F. 1910a. On q -definite integral. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 41: 193–203.

Jackson, F. 1910b. On q -difference equations. *American Journal of Mathematics* 32: 305–314.

Jahangiri, J.M. & Hamidi, S.G. 2013. Coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2013: 1–4.

Janteng, A., Halim, S.A. & Darus, M. 2006. Hankel determinant for functions starlike and convex with respect to symmetric points. *Journal of Quality Measurement and Analysis* 2(1): 37–43.

Janteng, A., Halim, S.A. & Darus, M. 2007. Hankel determinant for starlike and convex functions. *International Journal of Mathematics Analysis* 1(13): 619–625.

Juneja, O.P. & Mogra, M.L. 1978. Radii of convexity for certain classes of univalent analytic functions. *Pacific Journal of Mathematics* 78(2): 359–368.

Jung, I.B., Kim, Y.C. & Srivastava, H. 1993. The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators. *International Journal of Mathematical Analysis* 176(1): 138–147.

Kamali, M. & Srivastava, H.M. 2004. A sufficient condition for starlikeness of analytic functions of koebe type. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 5(3): 1–8.

Kanas, S. & Răducanu, D. 2009. Some class of analytic functions related to conic domains. *Mathematica slovacica* 64(5): 1183–1196.

Kaplan, W. 1952. Close to convex schlicht functions. *Michigan Mathematical Journal* 1(2): 169–185.

Kardioglu, E. 2003. On subclass of univalent function with negative coefficients. *Applied Mathematics and Computation* 146: 351–358.

Keogh, F.R. & Merkes, E.P. 1969. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. *Proceeding of American Mathematical Society* 20: 8–12.

Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebiger analytischer kurven. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1: 633–669.

Koepf, W. 1987. On the Fekete-Szegö problem for close-to-convex functions. *Proceeding of American Mathematical Society* 101: 89–95.

- Kowalczyk, B., Lecko, A. & Sim, Y.J. 2018. The sharp bound for the Hankel determinant of the third kind for convex functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 97(3): 435–445.
- Krishna, D.V. & RamReddy, T. 2015. Second Hankel determinant for the class of Bazilevic functions. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica* 60(3): 413–420.
- Krishna, D.V., Venkateswarlu, B. & RamReddy, T. 2015. Third Hankel determinant for bounded turning functions of order α . *Journal of the Nigerian Mathematical Society* 34(2): 121–127.
- Kuroki, K. & S., O. 2012. Notes on new class for certain analytic functions. *Advances in Mathematics: Scientific Journal* 1(2): 127–131.
- Kwon, O.S., Lecko, A. & Sim, Y.J. 2019. The bound of the Hankel determinant of the third kind for starlike functions. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* 42: 767–780.
- Lecko, A., Sim, Y.J. & Śmiarowska, B. 2019. The sharp bound of the Hankel determinant of the third kind for starlike functions of order $1/2$. *Complex Analysis and Operator Theory* 13: 2231–2238.
- Lee, S.K., Ravichandran, V. & Supramaniam, S. 2013. Bounds for the second Hankel determinant of certain univalent functions. *Journal of inequalities and Applications* 2013: 1–17.
- Leeman, Jr, G.B. 1976. The seventh coefficient of odd symmetric univalent functions. *Duke Mathematical Journal* 43(2): 301–307.
- Lewin, M. 1967. On a coefficient problem for bi-univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 18(1): 63–68.
- Libera, R.J. 1964. Some radius of convexity problems. *Duke Mathematical Journal* 31: 143–158.
- Libera, R.J. 1965. Some classes of regular univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 16: 755–758.
- Libera, R.J. & Złotkiewicz, E.J. 1982. Early coefficients of the inverse of a regular convex function. *Proceedings of the American Mathematical Society* 85(2): 225–230.
- Libera, R.J. & Złotkiewicz, E.J. 1983. Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in p . *Proceedings of the American Mathematical Society* 87(2): 251–257.
- Lindelöf, E. 1908. *Quelques Remarques sur la Croissance de la Fonction $\zeta(s)$* . Paris:

Gauthier-Villars.

- Littlewood, J.E. 1925. On inequalities in the theory of functions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2(1): 481–519.
- Littlewood, J.E. & Paley, E.A.C. 1932. A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients. *Journal of the London Mathematical Society* 1(3): 167–169.
- London, R.R. 1993. Fekete-Szegő inequalities for close-to-convex functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 117(4): 947–950.
- Löwner, K. 1923. Untersuchungen über schlichte konforme abbildungen des einheitskreises. *Mathematische Annalen* 89(1-2): 103–121.
- Ma, W. & Minda, D. 1992. Uniformly convex functions. *Annales Polonici Mathematici* 57: 165–175.
- Macgregor, T.H. 1962. Functions whose derivative has a positive real part. *Transactions of the American Mathematical Society* 104(3): 532–537.
- Miller, S.S. 1973. Distortion properties of alpha-starlike functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 38(2): 311–318.
- Miller, S.S. & Mocanu, P.T. 1978. Second order differential inequalities in the complex plane. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 65(2): 289–305.
- Miller, S.S. & Mocanu, P.T. 1981. Differential subordinations and univalent functions. *Michigan Mathematical Journal* 28(2): 157–172.
- Miller, S.S. & Mocanu, P.T. 1985. On some classes of first-order differential subordinations. *Michigan Mathematical Journal* 32(2): 185–195.
- Miller, S.S. & Mocanu, P.T. 2000. *Differential Subordinations: Theory and Applications*. Boca Raton: CRC Press.
- Miller, S.S. & Mocanu, P.T. 2003. Subordinants of differential superordinations. *Complex variables, Theory and Application: An International Journal* 48(10): 815–826.
- Miller, S.S., Mocanu, P.T. & Reade, M.O. 1978. Starlike integral operators. *Pacific Journal of Mathematics* 79(1): 157–168.
- Mocanu, P.T. 1969. Une propri'et'e de convexit'e g'eneralise'e dans lath'eorie de la repr'esentation conforme. *Mathematica* 11(34): 127–133.
- Nasr, M.A. & Aouf, M.K. 1985. Starlikefunctions of complex order. *Journal of Nature Science and Mathematics* 25: 1–12.

- Netanyahu, E. 1969. The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$. *Archive for rational mechanics and analysis* 32(2): 100–112.
- Noonan & Thomas. 1976. On the second hankel determinant of a areally mean p-valent functions. *Transaction of American Mathematical Society* 223(1): 337–346.
- Noor, K.I., Riaz, S.A.D.I.A. & Noor, M.A. 2017. On q -Bernardi integral operator. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics* 8(1): 3–11.
- Noor, K.I. & Shah, S.A. 2020. On q -Mocanu type functions associated with q -Ruscheweyh derivative operator. *International Journal of Analysis and Applications* 18(4): 550–558.
- Nunokawa, M. 1989. On the multivalent functions. *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics* 20(6): 577–582.
- Nunokawa, M., Owa, S., Lee, S.K., Obradović, M., Aouf, M.K., Saitoh, H., Ikeda, A. & Koike, N. 1996. A sufficient condition for starlikeness. *Chinese Journal of Mathematics* 1: 265–271.
- Obradović, M. & Ponnusamy, S. 2013. Radius of univalence of certain class of analytic functions. *Filomat* 27(6): 1085–1090.
- Oros, G.I. 2020. New differential subordinations obtained by using a differential-integral Ruscheweyh-Libera operator. *Miskolc Mathematical Notes* 21(1): 303–317.
- Oros, G.I. 2023. Sufficient conditions for univalence obtained by using the Ruscheweyh-Bernardi differential-integral operator. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica* 68(2): 249–260.
- Oros, G.I. & Lupas, A.A. 2020. Sufficient conditions for univalence obtained by using Briot-Bouquet differential subordination. *Mathematics and Statistics* 8: 126–136.
- Owa, S. 1990. On Nunokawa's conjecture for multivalent functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 41(2): 301–305.
- Owa, S., Fukui, S., Sakaguchi, K. & Ogawa, S. 1986. An application of the Ruscheweyh derivatives. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 9: 721–730.
- Owa, S. & Srivastava, H. 1986. Some applications of the generalised Libera integral operator. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* 62(6): 125–128.
- Ozawa, M. 1969. An elementary proof of Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Kodai Mathematical Seminar Reports*. 21: 129–132.

- Pais, A. 1979. Einstein and the quantum theory. *Reviews of modern physics* 51(4): 863–913.
- Pederson, R.N. 1968. On unitary properties of Grunsky's matrix. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 29: 370–377.
- Pederson, R.N. & Schiffer, M. 1972. A proof of Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 45(3): 161–193.
- Pick, G. 1916. Ueber eine eigenschaft der konformen abbildung kreisformiger bereiche. *Mathematische Annalen* 77(1): 1–6.
- Pinchuk, B. 1968. On starlike and convex functions of order α . *Duke Mathematical Journal* 35(4): 721–734.
- Ponnusamy, S. 1998. Hypergeometric transforms of functions with derivative in a half plane. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 96(1): 35–49.
- Ponnusamy, S. & Sabapathy, S. 1996. Polylogarithms in the theory of univalent functions. *Results in Mathematics* 30: 136–150.
- Prajapat, J.K., Bansal, D., Singh, A. & Mishra, A.K. 2015. Bounds on third Hankel determinant for close-to-convex functions. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica* 7(2): 210–219.
- Raina, R. & Bapna, I. 2004. Inequalities defining certain subclasses of analytic and multivalent functions involving fractional calculus operators. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 5(2): 1–6.
- Ramadan, S.F. & Darus, M. 2010. Univalence of an integral operator defined by generalized operators. *International Journal of Computer Mathematics* 4: 338–340.
- Ramesha, C., Kumar, S. & Padmanabhan, K.S. 1995. A sufficient condition for starlikeness. *Chinese Journal of Mathematics* 1: 167–171.
- Rao, G. & Saravanan, R. 2002. Some results concerning best uniform co-approximation. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 3(2): 1–5.
- Rao, G.S. & Chandrasekaran, K.R. 1987. Characterization of elements of best coapproximation in normed linear spaces. *Pure and Applied Mathematical Sciences* 26: 139–147.
- Robertson, M. 1985. Certain classes of starlike functions. *Michigan Mathematics Journal* 32: 135–140.
- Robertson, M.S. 1936. A remark on the odd schlicht functions. *Michigan Mathematics Journal* 42: 135–140.

- Rogosinki, S. 1931. Schr. k. galert. gesellsch. *Naturwiss* 81: 1–31.
- Rogosinki, W. 1943. On the coefficients of subordination functions. *Applied Mathematics and Computation* 48: 48–82.
- Ruscheweyh, S. 1975. New criteria for univalent functions. *Proceeding of American Mathematical Society* 45: 109–115.
- Salagean, G.S. 1983. *Subclass of Univalen Function*. Berlin: Springer.
- Schild, A. 1965. On starlike functions of order α . *American Journal of Mathematics* 87(1): 65–70.
- Seker, B. & Sümer Eker, S. 2017. On subclasses of bi-close-to-convex functions related to the odd-starlike functions. *Palestine Journal of Mathematics* 6: 215–221.
- Seoudy, T. & Aouf, M. 2016. Coefficient estimates of new classes of q -starlike and q -convex functions of complex order. *Journal of Mathematical Inequalities* 10(1): 135–145.
- Shanmugam, G., Stephen, B.A. & Babalola, K.O. 2014. Third Hankel determinant for alpha-starlike functions. *Gulf Journal of Mathematics* 2(2): 107–113.
- Shanmugam, T. 2007. Hypergeometric functions in the geometric function theory. *Applied Mathematics and Computation* 187(1): 433–444.
- Silverman, H. 1975. Univalent functions with negative coefficients. *Proceeding of American Mathematical Society* 51: 109–116.
- Silverman, H. 1997. Partial sums of starlike and convex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 209(1): 221–227.
- Siregar, S. 2011. The starlikeness of analytic functions of Koebe type. *Mathematical and Computer Modelling* 54(11-12): 2928–2938.
- Siregar, S. & Darus, M. 2004. On subclass of p -valent functions with negative coefficients. *Journal of Analysis and Applications* 2(3): 139–148.
- Siregar, S. & Darus, M. 2008. A note on Bernardi's integral operators of certain classes of analytic functions. *International Mathematical Forum* 3(40): 1991–1999.
- Siregar, S. & Darus, M. 2011. Certain conditions for starlikeness of analytic functions of Koebe type. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2011: 1–12.
- Sivasubramanian, S., Shanmugam, T.N. & Sivakumar, R. 2016. Coefficient bound for certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. *Far East Journal of Mathematical Sciences* 79(1): 123–128.

- Sokól, J. & Thomas, D.K. 2018. The second Hankel determinant for alpha-convex functions. *Lithuanian Mathematical Journal* 58: 212–218.
- Srivastava, H.M. 1989. *Univalent Functions, Fractional Calculus, and Associated Generalized Hypergeometric Functions*. New York: Wiley.
- Srivastava, H.M. & Choi, J. 2001. *Series associated with the zeta and related functions*. New York: Springer Science & Business Media.
- Srivastava, H.M., Eker, S.S. & Ali, R.M. 2015. Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions. *Filomat* 29(8): 1839–1843.
- Srivastava, H.M., Kiliçman, A., Abdalnaby, Z.E. & Ibrahim, R.W. 2017. Generalized convolution properties based on the modified Mittag-Leffler function. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* 10(8): 4284–4294.
- Srivastava, H.M., Mishra, A.K. & Gochhayat, P. 2010. Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. *Applied Mathematics Letters* 23(10): 1188–1192.
- Srivastava, H.M., Murugusundaramoorthy, G. & Bulboacă, T. 2022. The second Hankel determinant for subclasses of bi-univalent functions associated with a nephroid domain. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 116(4): 145–148.
- Sun, Y., Jiang, Y.P. & Rasila, A. 2015. Coefficient estimates for certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. *Filomat* 29(2): 351–360.
- Todorov, P.G. 1991. On the faber polynomials of the univalent functions of class σ . *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 162(1): 268–276.
- Ul-Haq, W., Nazneen, A. & Rehman, N. 2014. Coefficient estimates for certain subfamilies of close-to-convex functions of complex order. *Filomat* 28(6): 139–1142.
- Uralegaddi, B.A., Ganigi, M.D. & Sarangi, S.M. 1991. Univalent functions with positive coefficients. *Tamkang Journal of Mathematics* 25(3): 225–230.
- Uralegaddi, B.A. & Somanatha, C. 1991. Certain differential operators for meromorphic functions. *Houston Journal Mathematics* 17(2): 279–284.
- Uçar, H.E.O. 2016. Coefficient inequality for q -starlike functions. *Applied Mathematics and Computation* 276: 122–126.
- Wiatrowski, P. 1970. The coefficients of a certain family of holomorphic functions. *eszyty Naukowe Uniwersytetu Łódzkiego, Seria: Nauki Matematyczno-Przyrodnicze* 2: 75–85.
- Wright, E.M. 1935. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric

function. *Journal of the London Mathematical Society* 1(4): 268–293.

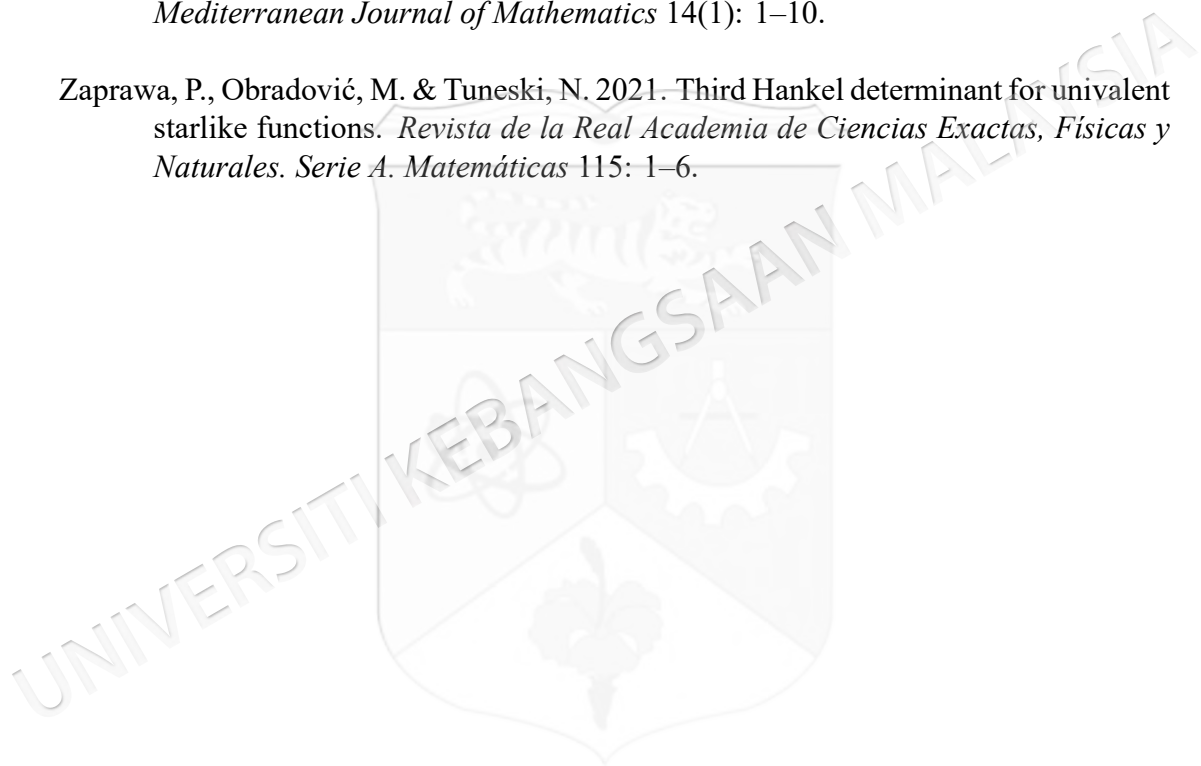
Xu, Q., Xiao, H. & Srivastava, H.M. 2012. A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems. *Applied Mathematics and Computation* 218(23): 11461–11465.

Yamakawa, R. 1992. *Current Topics in Analytic Function Theory*. Singapore: World Scientific Publishing Company.

Ye, Z. 2005. On successive coefficients of odd univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 133(11): 3355–3360.

Zaprawa, P. 2017. Third Hankel determinants for subclasses of univalent functions. *Mediterranean Journal of Mathematics* 14(1): 1–10.

Zaprawa, P., Obradović, M. & Tuneski, N. 2021. Third Hankel determinant for univalent starlike functions. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 115: 1–6.



LAMPIRAN**SENARAI PENERBITAN**

- Pauzi, M.N.M., Darus, M. & Siregar, S. 2021. A subclass of odd p -valent functions by Salagean operator with negative coefficients. *International Journal of Mathematics and Computer Science* 16(1): 321-332.(WOS-ESCI)(Scopus)
- Siregar, S., Pauzi, M.N.M., & Darus, M. 2020. Sufficient conditions of starlikeness and convexity for functions of complex order. *Journal of Quality Measurement and Analysis JQMA* 16(1): 117-124.(WOS-ESCI)(Scopus)
- Pauzi, M.N.M., Darus, M. & Siregar, S. 2019. Coefficient estimates for a subclass of analytic bi-univalent involving Faber polynomial and Fox-Wright functions. *AIP Conference Proceedings* 2111(1): 321-332.
- Siregar, S., Pauzi, M.N.M., & Darus, M. 2019. Coefficient bounds for subclass of m -fold symmetric bi-univalent functions sense of Yamakawa. *Journal of Physics: Conference Series* 1212(1): 012004.
- Pauzi, M.N.M., Darus, M. & Siregar, S. 2019. Partial sum of Analytic odd function defined by Salagean differential operator. *Journal of Physics: Conference Series* 1212(1): 012001.
- Pauzi, M.N.M., Darus, M. & Siregar, S. 2018. Second Hankel determinant for a class defined by modified Mittag-Leffler with generalized polylogarithm functions. *Journal of Mathematics and Computer Science* 18(4): 453-459.(WOS-ESCI)(Scopus)

Pauzi, M.N.M., Darus, M. & Siregar, S. 2018. Coefficient estimates certain Subclasses of analytic and bi-univalent functions involving Fox-Wright and Kuroki-Owa. *Proceedings of the Informatics Conference* 4(6): 12-16.

Pauzi, M.N.M., Darus, M. & Siregar, S. 2018. Second and third Hankel determinant for a class defined by generalized polylogarithm functions. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics* 10(1): 31-41. (Mathematical Review) (EBSCO)

Siregar, S. & Pauzi, M.N.M. 2017. Superordination of analytic functions of Koebe Type. *Selangor Science & Technology Review (SeSTeR)* 1(2). (MySite)

Pauzi, M.N.M. & Darus, M. 2017. Generalised class of starlike functions of Koebe Type with Complex Order. *Journal of Quality Measurement and Analysis* 13(1): 1Y13.(WOS-ESCI)(Scopus)

